● 非线性科学丛书 ●

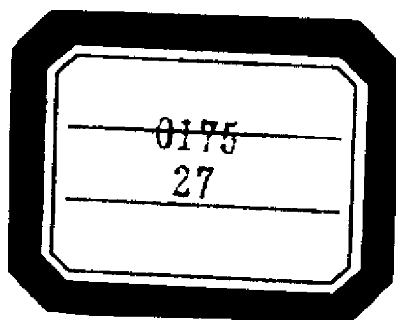
孤子理论和微扰方法

黄念宁 编著

上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

1736006



非 线 性 科 学 丛 书

孤子理论和微扰方法

黄念宁　编著

7111/80/98



上 海 科 技 教 育 出 版 社



内 容 提 要

本书是“非线性科学丛书”中的一种. 本书讲解孤子理论的基本内容. 包括求解最基本的非线性演化方程的反散射方法，哈密顿系统理论和以反散射变换为基础的微扰理论，还包括暗孤子的基本理论. 本书不是一般介绍性的读物，而是为有关的读者提供一本系统的基本理论和实际研究工作中可以查阅的书. 本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考.

非线性科学丛书
孤子理论和微扰方法
黄念宁 编著
上海科技教育出版社出版发行
(上海市冠生园路393号　邮政编码200233)
各地新华书店经销　上海印刷六厂印刷
开本850×1168 1/32 印张8.125 字数205,000
1996年10月第1版 1996年10月第1次印刷
印数1－3200本
ISBN 7－5428－1380－3/O・127　定价：(精装本)14.60元

Theory of Solitons and Method of Perturbations

Huang Nian-Ning

Department of Physics, Wuhan University
Wuhan 430072,China

Shanghai Scientific and Technological Education
Publishing House, SHANGHAI,1996

非线性科学丛书编辑委员会

主　编：郝柏林

副主编：郑伟谋　吴智仁

编　委：（按姓氏笔画为序）

丁鄂江　文志英　朱照宣
刘式达　刘寄星　孙义燧
杨清建　李邦河　张洪钧
张景中　陈式刚　周作领
赵凯华　胡　岗　顾　雁
倪皖荪　徐京华　郭柏灵
陶瑞宝　谢惠民　蒲富恪
霍裕平　魏荣爵

非线性科学丛书

出版说明

现代自然科学和技术的发展,正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法."数、理、化、天、地、生"这些曾经以纵向发展为主的基础学科,与日新月异的新技术相结合,使用数值、解析和图形并举的计算机方法,推出了横跨多种学科门类的新兴领域.这种发展的一个重要特征,可以概括为"非"字当头,即出现了以"非"字起首而命名的一系列新方向和新领域.其中,非线性科学占有极其重要的位置.这决非人们"想入非非",而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升.

曾几何时,非线性还被人们当作个性极强,无从逾越的难题.每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法,运用新颖的技巧.诚然,力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程,物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型.不过,这些都曾是稀如凤毛麟角的"手工艺"珍品,人们还没有悟出它们的普遍启示,也没有看到它们之间的内在联系.

20世纪60年代中期,事情从非线性现象的两个极端同时发生变化.一方面,描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算,揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质.这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径,即所谓"反散射"方法.反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念,反映了这类方程内秉的对称和保守性质.到了80年代,反散射方法推广到量子问题,发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系.

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理. 于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域. 虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的.

另一方面,在"不可积"的极端,对KAM定理条件的"反面文章",揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例. 这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识. 原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测. 然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构.

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象. 从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律. 如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程. 标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用.

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题. 物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用. "非线性"一词曾经是数学中用以区别于"线性"问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿. 各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和. 非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法.

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步．于是，有了动员在前沿工作的教学和研究人员，以集体力量撰写一套"非线性科学丛书"的想法．在上海科技教育出版社的大力支持下，这一计划得以付诸实现．

这套"非线性科学丛书"不是高级科普，也不是大块专著．它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展，帮助大学高年级学生、研究生、博士后人员和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域，同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人员更新知识提供自学教材．非线性科学的全貌将由整套丛书刻划，每册努力讲清一个主题，一个侧面，而不求面面俱到，以免失之过泛．在写作风格上，作者们将努力深入浅出，图文并茂，文献丰富；力求有实质内容，无空洞议论，以真刀真枪脚踏实地武装读者．从读者方面，自然要求具备理工科大学本科的数学基础，和读书时自己主动思索与推导的习惯．

"非线性科学丛书"的成功，取决于读者和作者的支持．我们衷心欢迎批评和建议．

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

Abstract

This book is one of the advanced series in nonlinear science. Chios, fractals and solitons are basic branches of the nonlinear science. This book contains the main results of theory of solitons, namely, the method of inverse scattering transform for some basic nonlinear evolution equations, theory of Hamiltonian system and basic perturbation theory, as well as theory of dark solitons. This book is not a popular one, but one providing systematic basic theories and references for real researches.

目　录

Contents

第 1 章

KdV 方 程

KdV 方程 (Korteweg-de Vries 方程) 是一个典型的非线性演化方程，它是由描述浅水波而导出的．在 60 年代，求解非线性方程的反散射方法，是由噶德奈尔 (C.S.Gardner), 格林 (J.M.Greene), 克鲁斯卡 (M.D.Kruskal) 和谬拉 (R.M.Miura) 在求解 KdV 方程时创立的．本章通过 KdV 方程的求解，介绍反散射方法．

§ 1 KdV 方程和它的拉克斯对

KdV 方程是

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.1}$$

这里 u 是实的．它在零边值条件

$$u \to 0 \qquad \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时} \tag{1.2}$$

下的求解，首先是用反散射方法才系统地解决的．并且，显式地得到一种特殊形式的解，所谓孤子解．这一解法的要点，按照拉克斯 (P.D.Lax) 的分析，首先是引入一对线性方程，

$$\hat{L}\Phi(x,t,E) = E\Phi(x,t,E) \tag{1.3}$$

和

$$\partial_t \Phi(x,t,E) = \hat{M}\Phi(x,t,E), \tag{1.4}$$

这里 (1.3) 中的 $\hat{L}$ 是一个线性算子，E 是它的本征值，$\Phi(x,t,E)$ 是相应的本征函数．(1.4) 中的 $\hat{M}$ 是另一个线性算子，这一方

程描写本征函数 $\Phi(x,t,E)$ 随时间的演化．今后，我们往往略去 t, 有时也略去 x.

如果这一对方程是相容的，且 E 独立于 t, 即

$$E_t = 0, \tag{1.5}$$

则有

$$\hat{L}_t + [\hat{L}, \hat{M}] = 0, \tag{1.6}$$

式中

$$[\hat{L}, \hat{M}] = \hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}. \tag{1.7}$$

一般说来，(1.6) 是一个算子方程．但是，如果对算子的形式作某些限制，可以使 $[\hat{L}, \hat{M}]$ 成为只含 x 的微分算子，u 和它对 x 的微商．现在选取

$$\hat{L} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{1.8}$$

和

$$\hat{M} = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x(x,t), \tag{1.9}$$

则 (1.6) 就等价于 KdV 方程 (1.1). 所以，如果 $u(x,t)$ 是 KdV 方程的解，(1.6) 就成立，于是，(1.5) 成立，E 独立于 t.

这时，我们把方程 (1.3) 改写为

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + E - u(x)\right\}\Phi(x,E) = 0, \tag{1.10}$$

这里我们略去了 t, 把偏微商写成了微商．方程 (1.10) 正好是一维薛定谔 (E.Schrödinger) 方程，E 是能量，$u(x,t)$ 是位．我们注意，由于位依赖于 t, 本征值一般也依赖于 t, 但当 $u(x,t)$ 是 KdV 方程的解时，以上已经得到 E 独立于 t.

对于方程 (1.10), 通常是给定位 u, 在一定边界条件下来求本征值 E 和本征函数 $\Phi(x,E)$. 可是，在本世纪 50 年代，在处理

核物理问题时，却产生了从解 $\Phi(x,E)$ 求位 $u(x,t)$ 的反问题. 当时认为核力可以用量子力学中的位来描写，可是只知道它的一些一般的性质，具体的形式不知道. 但是，实验上可以定出，至少原则上可以定出，能级和散射相移等等，即本征值和渐近的波函数. 于是就产生了反问题. 可是，这一问题太困难. 自然在数学上首先讨论了一种最简单的情况，一维薛定谔方程. 这时得到许多有价值的结果. 但是，这些结果仍与核物理的实际要求相距太远，并未能用来解决核力的问题. 意料不到的是，若干年后，在 KdV 方程的反散射方法求解上却起了十分重要的作用.

方程 (1.8) 和 (1.9) 称为 KdV 方程的 **拉克斯对**, 以 (1.8) 和 (1.9) 代入后的 (1.3) 和 (1.4) 称为 KdV 方程的 **拉克斯方程**.

§ 2 正散射问题

假定 $u(x)$ 满足下列条件：

(1) $u(x)$ 是实的，连续可微的；

(2) 当 $|x|\to\infty$ 时， $u(x)$ 趋于 0, 且按照更严格的说法，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|(1+|x|)dx<\infty. \tag{2.1}$$

由于 $\hat{L}$ 是自共轭算子， E 是实数. $E<0$ 相应于非简并的分离谱与平方可积的本征函数，即束缚态. $E>0$ 相应于二重简并的连续谱与非平方可积的 (在施瓦兹 (L.Schwartz) 意义下平方可积的) 本征函数，即散射态. 分离谱的项可有无穷多个，这时在 $E=0$ 的邻域内有无穷多个分离的本征值. 当 $|u(x)|$ 随 $|x|\to\infty$ 而缓慢地趋于 0 时，如一维库仑位 $u(x)\propto x^{-1}$ 时，就出现这种情况. 可以证明，以上条件 (2.1) 保证了 (1.10) 的分离谱只含有限项.

我们引入变量 k,

$$E = k^2. \tag{2.2}$$

这样，当 $E > 0$ 时， k 为正 (或负) 实数，相应于往右 (往左) 的散射态. 当 $E < 0$ 时， k 为纯虚数，且是分离的，以下标 n 编号， $k_n = i\kappa_n, n = 1, 2, ..., N$, 相应于束缚态. 现在采用如下方式来讨论. 从实的 k 的散射态出发，利用 k 的函数的解析延拓，得到纯虚的 k 的函数，即束缚态.

将方程 (1.10) 改写为

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\right\} f(x,k) = k^2 f(x,k). \tag{2.3}$$

这里我们用 $f(x,k)$ 代替 (1.10) 中的 $\Phi(x,E)$. 当 $u(x)$ 满足边界条件 (1.2) 时，上式的渐近解，即当 $|x| \to \infty$ 时的解，是

$$e^{ikx} \quad \text{或} \quad e^{-ikx}. \tag{2.4}$$

利用渐近解 (2.4) 定义方程 (2.3) 的解：

$$\begin{aligned} &\phi(x,k) \to e^{-ikx}, && \text{当 } x \to -\infty \text{ 时}, \\ &\psi(x,k) \to e^{ikx}, && \text{当 } x \to \infty \text{ 时}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

这样，得到下列积分方程，

$$\phi(x,k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}}{i2k} u(y)\phi(y,k)\,dy. \tag{2.6}$$

这一式可以由变动参数法得出，或者直接验证 (2.6) 满足边界条件 (2.5) 和方程 (2.3).

我们再定义 (2.3) 的解：

$$\begin{aligned} &\tilde{\phi}(x,k) \to e^{ikx} && \text{当 } x \to -\infty \text{ 时}, \\ &\tilde{\psi}(x,k) \to e^{-ikx} && \text{当 } x \to \infty \text{ 时}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

类似于 (2.6), 可得

$$\tilde{\phi}(x,k) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}}{i2k} u(y)\tilde{\phi}(y,k)\,dy. \tag{2.8}$$

以上由边值条件定义的 $\phi(x,k)$、$\psi(x,k)$、$\tilde{\phi}(x,k)$ 和 $\tilde{\psi}(x,k)$ 称为方程 (2.3) 的 **约斯特** (Jost) **解**. 由于 $\phi(x,k)$ 和 $\tilde{\phi}(x,k)$ 的渐近行为不同, 所以它们是方程 (1.8) 的算子 $\hat{L}$ 的本征值 k^2 的两个独立解. 同理, $\tilde{\psi}(x,k)$ 和 $\psi(x,k)$ 也是两个独立解. 由于 $\hat{L}$ 是二阶微商的, 方程 (2.3) 只有两个独立解. 所以, 以上两组独立解彼此可以表为线性组合, 例如,

$$\phi(x,k) = a(k)\tilde{\psi}(x,k) + b(k)\psi(x,k), \tag{2.9}$$

这里 $a(k)$ 和 $b(k)$ 不依赖于 x.

将上式改写为

$$a(k)^{-1}\phi(x,k) = \tilde{\psi}(x,k) + r(k)\psi(x,k), \tag{2.10}$$

式中

$$r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}. \tag{2.11}$$

由 (2.10) 可以得到: 当 $x \to \infty$ 时, 右端趋于 $e^{-ikx} + r(k)e^{ikx}$, 当 $x \to -\infty$ 时, 左端趋于 $a(k)^{-1}e^{-ikx}$. 这可解释如下: 左行波 e^{-ikx} 从右方入射, 经过位 $u(x)$ 的作用, 一部分 $a(k)^{-1}e^{-ikx}$ 透射到左方, 为透射波, 另一部分 $r(k)e^{ikx}$ 被反射回右方, 为反射波. 从量子力学已知, 反射系数与透射系数之和为 1. 以透射振幅 $t(k)$ 和反射振幅 $r(k)$ 表示, 即

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1, \tag{2.12}$$

式中

$$t(k) = a(k)^{-1}. \tag{2.13}$$

(2.12) 也就是

$$|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1. \tag{2.14}$$

所以 $|a(k)| \geq 1$ 和 $|r(k)| \leq 1$.

对于二阶微分方程 (2.3), 引入 **朗斯基**(H.Wronski)**行列式**. 设 $f(x,k)$ 和 $g(x,k)$ 是这一个二阶微分方程的解，定义它们的 **朗斯基行列式** 为

$$W\big[f(x,k),g(x,k)\big] = \det\begin{pmatrix} f(x,k) & g(x,k) \\ f_x(x,k) & g_x(x,k) \end{pmatrix}$$
$$= f(x,k)g_x(x,k) - f_x(x,k)g(x,k). \tag{2.15}$$

由此可见，它是否为 0, 就是 $f(x,k)$ 和 $g(x,k)$ 是否线性独立的充分和必要条件. 由 (2.3) 和 (2.15) 立即得到朗斯基行列式的下列简单性质：

$$W_x\big[f(x,k),g(x,k)\big] = 0. \tag{2.16}$$

这表示，$f(x,k)$ 和 $g(x,k)$ 的朗斯基行列式的值独立于 x, 因此，它的值可以在某一特定的 x 处来求出.

这样，我们看到

$$W\big[\phi(x,k),\tilde{\phi}(x,k)\big] = i2k, \tag{2.17}$$

因为在 $x \to -\infty$ 处容易求出它的值. 同理，

$$W\big[\tilde{\psi}(x,k),\psi(x,k)\big] = i2k, \tag{2.18}$$

可在 $x \to \infty$ 处求值. 利用它们，由 (2.9) 得到

$$a(k) = \frac{1}{i2k}W\big[\phi(x,k),\psi(x,k)\big] \tag{2.19}$$

和

$$b(k) = \frac{1}{i2k}W\big[\tilde{\psi}(x,k),\phi(x,k)\big]. \tag{2.20}$$

当 k 为实数时，由 (2.6) 和 (2.8) 可以得到 $\tilde{\phi}(x,k)$ 与 $\phi(x,k)$ 的下列关系：

$$\tilde{\phi}(x,k) = \overline{\phi(x,k)} = \phi(x,-k), \tag{2.21}$$

因为不单它们在 $x \to -\infty$ 的渐近行为相同，而且他们满足的方程也相同. 同理，有

$$\tilde{\psi}(x,k) = \overline{\psi(x,k)} = \psi(x,-k). \tag{2.22}$$

由 (2.9) 和此二式，得

$$\tilde{\phi}(x,k) = \tilde{b}(k)\tilde{\psi}(x,k) + \tilde{a}(k)\psi(x,k), \tag{2.23}$$

这里

$$\tilde{a}(k) = \overline{a(k)} = a(-k), \qquad \tilde{b}(k) = \overline{b(k)} = b(-k). \tag{2.24}$$

又有

$$\tilde{a}(k) = -\frac{1}{i2k} W\left[\tilde{\phi}(x,k), \tilde{\psi}(x,k)\right] \tag{2.25}$$

和

$$\tilde{b}(k) = -\frac{1}{i2k} W\left[\psi(x,k), \tilde{\phi}(x,k)\right]. \tag{2.26}$$

由 (2.19) 可见， $a(k)$ 的值与右端的 x 无关，取 $x \to \infty$, 注意 (2.5) 和 (2.6), 得到

$$a(k) = 1 - \frac{1}{i2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2ky} u(y)\phi(y,k)dy. \tag{2.27}$$

同理，由 (2.20) 得

$$b(k) = \frac{1}{i2k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2ky} u(y)\tilde{\phi}(y,k)dy. \tag{2.28}$$

利用 (2.21), 立即得到

$$\lim_{k \to 0} r(k) = -1. \tag{2.29}$$

§ 3　约斯特解的解析性

引入函数

$$\check{\phi}(x,k)=\phi(x,k)e^{ikx}. \tag{3.1}$$

由 (2.6), 得

$$\check{\phi}(x,k)=1+\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{i2k(x-y)}-1}{i2k}u(y)\check{\phi}(y,k)dy. \tag{3.2}$$

经过迭代可以得到诺伊曼 (J.von Neumann) 展开式,

$$\check{\phi}(x,k)=1+\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{i2k(x-y)}-1}{i2k}u(y)dy$$

$$+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{e^{i2k(x-y)}-1}{i2k}u(y)\frac{e^{i2k(y-z)}-1}{i2k}u(z)dy\,dz+\cdots, \tag{3.3}$$

于是，当 k 为复数，且 $\operatorname{Im} k>0$ 时，可见

$$\left|\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{i2k(x-y)}-1}{i2k}u(y)\right|dy\leq\frac{1}{|k|}\int_{-\infty}^{x}|u(y)|\,dy, \tag{3.4}$$

因为有 $e^{-2\operatorname{Im}k(x-y)}<1$. 所以，这时有

$$|\check{\phi}(x,k)|\leq 1+\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{|k|}|u(y)|\,dy$$

$$+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{|k|^2}|u(y)||u(z)|\,dy\,dz+\cdots. \tag{3.5}$$

利用交换积分次序等手续，得到

$$|\check{\phi}(x,k)|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{M}{|k|}\right)^n=\exp\left\{\frac{M}{|k|}\right\}, \tag{3.6}$$

这里

$$M=\int_{-\infty}^{\infty}|u(y)|\,dy. \tag{3.7}$$

以上的条件 (2), 即 (2.1), 保证了

$$M\leq\infty. \tag{3.8}$$

由此，当 $\operatorname{Im}k>0$ 时，诺伊曼展开式的每一项都是 k 的解析函数，且级数一致收敛，因此函数 $\check{\phi}(x,k)$ 在 k 的上半平面解析. 由此， $\phi(x,k)$ 在 k 的上半平面解析. 同理， $\psi(x,k)$ 在 k 的上半平面解析. 由 (2.19) 可见， $a(k)$ 也是在 k 的上半平面解析.

类似的手续可以证明， $\tilde{\phi}(x,k)$、$\tilde{\psi}(x,k)$ 和 $\tilde{a}(k)$ 在 k 的下半平面解析. 但是， $b(k)$ 和 $\tilde{b}(k)$ 一般不能解析延拓到实轴之外.

在延拓到复 k 平面时，有的公式要作修改. (2.21)、(2.22) 和 (2.24) 分别改为

$$\tilde{\phi}(x,k)=\overline{\phi(x,\bar{k})}, \tag{3.9}$$

$$\tilde{\psi}(x,k)=\overline{\psi(x,\bar{k})} \tag{3.10}$$

和

$$\tilde{a}(k)=\overline{a(\bar{k})}. \tag{3.11}$$

§ 4　$a(k)$的表示式

在 k 的上半平面，而 $|k|\to\infty$ 时，由诺伊曼展开式 (3.3) 得

$$\begin{aligned}\phi(x,k)&=e^{-ikx}\left(1-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{i2k}u(y)\,dy+\cdots\right)\\&=e^{-ikx}+O(|k|^{-1}).\end{aligned} \tag{4.1}$$

类似地，又有

$$\psi(x,k)=e^{ikx}\left(1-\int_{x}^{\infty}\frac{1}{i2k}u(y)\,dy+\cdots\right)$$

$$= e^{ikx} + O(|k|^{-1}). \tag{4.2}$$

因此，有

$$a(k) = 1 - \frac{1}{i2k}\int_{-\infty}^{\infty} u(y)\,dy = 1 + O(|k|^{-1}). \tag{4.3}$$

由于解析函数只可能有零点．设 $a(k)$ 在 k 的上半平面有零点 $k_1, k_2, ..., k_N$，则

$$a(k_n) = 0, \qquad \mathrm{Im}\ k_n > 0. \tag{4.4}$$

前面已经说过，k_n^2 是 $\hat{L}$ 的分离的本征值，这时 $E < 0$. 所以 k_n 为纯虚数，即

$$k_n = i\kappa_n, \qquad \kappa_n = \text{正实数}. \tag{4.5}$$

这时，由 (2.6) 得

$$\phi(x, i\kappa_n) = e^{\kappa_n x} - \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\kappa_n(x-y)} - e^{\kappa_n(x-y)}}{2\kappa_n} u(y)\phi(y, i\kappa_n)dy. \tag{4.6}$$

从这一积分方程可见，$\phi(x, i\kappa_n)$ 是实的．由 (3.9) 可见它也就是 $\tilde{\phi}(x, -i\kappa_n)$. 同理，$\psi(x, i\kappa_n)$ 和 $\tilde{\psi}(x, -i\kappa_n)$ 是实的，且相等．由朗斯基行列式 (2.15), 可见 $\phi(x, k)$ 和 $\psi(x, k)$ 成比例，即

$$\phi(x, k_n) = b_n\psi(x, k_n), \tag{4.7}$$

b_n 是一实常数．由渐近条件 (2.5) 和 (2.6) 可见，(4.7) 在 $x \to -\infty$ 时趋于 $e^{\kappa_n x}$, 而在 $x \to \infty$ 时趋于 $b_n e^{-\kappa_n x}$. 所以 b_n 的正负号依赖于函数 $\phi(x, i\kappa_n)$ 与轴的相交的次数．

我们现在来证明，$a(k)$ 的零点只能是简单零点，即

$$\dot{a}(k_n) \neq 0, \quad \dot{a}(k_n) \equiv \frac{d}{dk}a(k)\Big|_{k=k_n}. \tag{4.8}$$

首先将朗斯基行列式的定义推广到对不同的 k 的情形，定义

$$W\left[\phi(x,k), \phi(x,k_n)\right] = \det\begin{pmatrix} \phi(x,k) & \phi(x,k_n) \\ \phi_x(x,k) & \phi_x(x,k_n) \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

注意到方程 (2.3), 得到

$$W_x\big[\phi(x,k),\phi(x,k_n)\big]=(k^2-k_n^2)\phi(x,k)\phi(x,k_n). \tag{4.10}$$

对 k 求微商，再令 $k=k_n$，得

$$W_x\big[\dot\phi(x,k_n),\phi(x,k_n)\big]=2k_n\phi^2(x,k_n). \tag{4.11}$$

对 x 积分，注意边界条件，得

$$W\big[\dot\phi(x,k_n),\phi(x,k_n)\big]=2k_n\int_{-\infty}^{x}\phi^2(y,k_n)\,dy. \tag{4.12}$$

类似地，我们有

$$W\big[\psi(x,k_n),\dot\psi(x,k_n)\big]=2k_n\int_{x}^{\infty}\psi^2(y,k_n)\,dy. \tag{4.13}$$

由 (2.19) 得

$$\dot a(k_n)=\frac{1}{i2k_n}\Big\{W\big[\dot\phi(k_n),\phi(k_n)\big]+W\big[\phi(k_n),\dot\psi(k_n)\big]\Big\}. \tag{4.14}$$

反复应用 (4.7), 再以前两式代入，得

$$\begin{aligned}\dot a(k_n)&=-i\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,k_n)\psi(x,k_n)\,dx\\&=-ib_n\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2(x,k_n)\,dx.\end{aligned} \tag{4.15}$$

由于 $\psi(x,k_n)$ 是实的. 这就得到 (4.8), 而且

$$c_n\equiv\frac{b_n}{a_n}>0,\qquad a_n\equiv i\dot a(k_n). \tag{4.16}$$

这就证明了 $a(k)$ 的零点都是简单零点. 我们编序如下：

$$\kappa_1>\kappa_2>\cdots>\kappa_N. \tag{4.17}$$

前面已经说过 b_n 的意义. 这样, $E_1=-\kappa_1^2$ 为最低能态. 由量子力学已知, 其波函数之值将处处不为 0, 即不与 x 轴相交, 所以得 $b_1>0$. $E_2=-k_2^2$ 的波函数将与 x 轴有一个交点, 所以得 $b_2<0$, 如此等等. 由此推出,

$$b_n=(-1)^{(n-1)}|b_n|. \tag{4.19}$$

由 (3.11) 又可得到, $\tilde{a}(k)$ 在 k 的下半平面也有零点 $\bar{k}_n=-i\kappa_n$, $n=1,2,...,N$.

现在来求 $a(k)$ 的表示式. 先看 $a(k)$ 在上半平面无零点的情况. 这时由柯西公式, 对上半平面的任何点 k 有

$$\ln a(k)=\frac{1}{i2\pi}\oint\frac{\ln a(k')}{k'-k}\,dk'=\frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln a(k')}{k'-k}\,dk', \tag{4.20}$$

这里前一等式中的积分沿由实轴和上半平面的大的半圆弧组成的反时针回路. 因为当 $|k|\to$ 时 $\ln a(k)\to 0$, 所以得到后一等式. 这时 $\tilde{a}(k)$ 在下半平面也无零点. 对上半平面的任何点 k 有

$$0=\frac{1}{i2\pi}\oint\frac{\ln\tilde{a}(k')}{k'-k}\,dk'=\frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\tilde{a}(k')}{k'-k}\,dk'. \tag{4.21}$$

这里前一等式中的积分沿由实轴和下半平面的大的半圆弧组成的反时针回路. 因为当 $|k|\to$ 时 $\ln a(k)\to 0$, 所以得到后一等式. 当 k 为实数时, 注意 (2.24), 将 (4.20) 和 (4.21) 相加, 得到

$$\ln a(k)=\frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|a(k')|^2}{k'-k}\,dk', \tag{4.22}$$

即

$$a(k)=\exp\left\{\frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|a(k')|^2}{k'-k}\,dk'\right\}. \tag{4.23}$$

再看 $a(k)$ 在上半平面有零点 $k_1,k_2,...,k_N$ 的情况. 这时我们先将 $a(k)$ 表为

$$a(k)=\prod_{n=1}^{N}\frac{k-k_n}{k-\bar{k}_n}\check{a}(k), \tag{4.24}$$

这样定义的 $\check{a}(k)$ 正具有上述不含零点时的 $a(k)$ 的性质，所以这时的 $\check{a}(k)$ 取表示式 (4.23). 于是得到，有零点时的表示式，

$$a(k)=\prod_{n=1}^{N}\frac{k-k_n}{k-\bar{k}_n}\exp\left\{\frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|a(k')|^2}{k'-k}\,dk'\right\}. \tag{4.25}$$

这里 k 位于 k 的上半平面. 当 k 取实数值时，上式右端的积分中的 k 应理解为从上半平面趋于实轴，即理解为 $k+i0$.

由 (3.11) 可见， $\bar{k}_n$ 是 $\tilde{a}(k)$ 的零点

$$\tilde{a}(\bar{k}_n)=0. \tag{4.26}$$

它自然也是简单零点. 由 (2.25) 得

$$\tilde{\phi}(x,\bar{k}_n)=\tilde{b}_n\tilde{\psi}(x,\bar{k}_n), \tag{4.27}$$

式中 $\tilde{b}_n$ 为实常数. 由 (3.9) 和 (3.10) 可见，

$$\tilde{b}_n=b_n. \tag{4.28}$$

自然又有

$$\tilde{c}_n=c_n,\qquad \tilde{c}_n\equiv\frac{\tilde{b}_n}{\tilde{a}_n},\qquad \tilde{a}_n\equiv-i\dot{\tilde{a}}(\bar{k}_n). \tag{4.29}$$

§ 5 萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程

定义

$$\Theta(x,k)=\begin{cases}a(k)^{-1}\phi(x,k), & \text{当}\,\mathrm{Im}\,k>0\,\text{时};\\ \tilde{\psi}(x,k), & \text{当}\,\mathrm{Im}\,k<0\,\text{时}.\end{cases} \tag{5.1}$$

$a(k)^{-1}\phi(x,k)$ 在 k 的上半平面中，除了在 k_n, $n=1,2,...,N$, 有简单极点外，处处解析. $\tilde{\psi}(x,k)$ 在下半平面解析. $\Theta(x,k)$ 在实轴处有跃度

$$a(k)^{-1}\phi(x,k)-\tilde{\psi}(x,k)=r(k)\psi(x,k), \tag{5.2}$$

这里 $r(k)=b(k)/a(k)$, 即 (2.11). 在上和下半平面，$\Theta(x,k)$ 有极限

$$\Theta(x,k)e^{-ikx}-1=O(|k|^{-1}). \qquad \text{当} |k|\to\infty\text{时} \tag{5.3}$$

应用柯西公式，得

$$\Theta(x,k)\,e^{ikx}-1=\frac{1}{i2\pi}\oint\frac{\Theta(x,k')\,e^{ik'x}-1}{k'-k}\,dk', \tag{5.4}$$

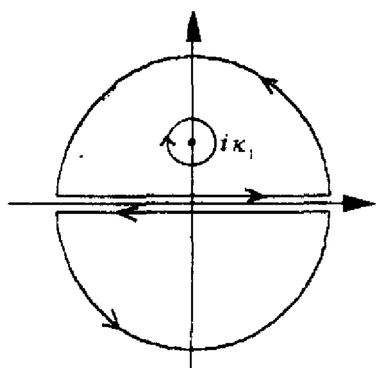


图 5-1 积分回路

这里积分回路如图 5-1, 即上下平面沿实轴和无穷远处的半圆弧组成的两个反时针回路，和绕每一个 k_n 的顺时针的小圆 r_n.

由于 (5.3), 大圆弧的积分可以略去，所以 (5.4) 右端化为留数部分 $R(x,k)$ 和连续谱部分 $J(x,k)$ 之和,

$$R(x,k)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{i2\pi}\oint_{r_n}\frac{\Theta(x,k')\,e^{ik'x}-1}{k''-k}\,dk'', \tag{5.5}$$

$$J(x,k)=\frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(k')\psi(x,k')e^{ik'x}}{k'-k}\,dk', \tag{5.6}$$

这里 r_n 表示绕 $a(k)$ 的零点 $k_n=i\kappa_n$ 的小圆. 绕 r_n 的积分是

$$-\frac{1}{\dot{a}(k_n)}\frac{1}{k_n-k}\phi(x,k_n)\,e^{ik_nx}=i\frac{1}{k-k_n}\,c_n\,\psi(x,k_n)\,e^{ik_nx}, \tag{5.7}$$

式中

$$c_n = \frac{b_n}{a_n}, \qquad a_n \equiv i\dot{a}(k_n). \tag{5.8}$$

这样，就得到

$$R(x,k) = i\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{k-k_n}\, c_n\, \psi(x,k_n)\, e^{ik_n x}. \tag{5.9}$$

代入 (5.4), 得到

$$\Theta(x,k) = \{1 + R(x,k) + J(x,k)\}\, e^{-ikx}. \tag{5.10}$$

若 k 是下半平面的点，则 (5.10) 为

$$\tilde{\psi}(x,k) = \{1 + R(x,k) + J(x,k)\}\, e^{-ikx}. \tag{5.11}$$

这时，若 k 是实的，我们就理解为 $k - i0$, 即 k 由下半平面趋于实轴. (5.11) 就是 KdV 方程的 **萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程**. 由此得

$$\overline{\psi(x,\bar{k})} = \{1 + R(x,k) + J(x,k)\}\, e^{-ikx}. \tag{5.12}$$

当 k 为实数时，由 (2.22), 上式又为

$$\psi(x;k) = \{1 + R(x,-k) + J(x,-k)\}\, e^{ikx}. \tag{5.13}$$

由 (4.2), 得

$$u(x) = i2 \lim_{|k|\to\infty} k\frac{d}{dx}\{\psi(x,k)e^{-ikx} - 1\}. \tag{5.14}$$

从 (5.13) 得

$$u(x) = -2\frac{d}{dx}\{R(x) + J(x)\}. \tag{5.15}$$

这里

$$R(x) \equiv \lim_{|k|\to\infty} ikR(x,-k) = -\lim_{|k|\to\infty} ikR(x,k), \tag{5.16}$$

$$J(x) \equiv \lim_{|k|\to\infty} ikJ(x,-k) = -\lim_{|k|\to\infty} ikJ(x,k). \tag{5.17}$$

将 $R(x,k)$ 和 $J(x,k)$ 的表示式代入，得到

$$R(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \psi(x,k_n)\, e^{ik_n x}, \tag{5.18}$$

$$J(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(k)\psi(x,k')e^{ik'x}\,dk'. \tag{5.19}$$

§ 6　马尔钦柯反散射方程

由于

$$\check{\psi}(x,k) = \psi(x,k)e^{-ikx} \tag{6.1}$$

在 k 的上半平面解析，且当 $|k| \to \infty$ 时趋于 1, 现将它作为 k 的函数作傅里叶 变换，

$$\check{\psi}(x,k) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} A(x,z)e^{ikz}\,dz, \tag{6.2}$$

这时它的逆变换为

$$A(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{\check{\psi}(x,k) - 1\}e^{-ikz}\,dk. \tag{6.3}$$

当 $z<0$ 时，我们可以在右端加上 k 的上半平面的一个很大的半圆弧的积分，因为 $\mathrm{Re}\{-ikz\} = -\mathrm{Im}\,k|z| < 0$, 这样，当 $z<0$ 时，上式右端可以换成沿实轴和上述大半圆弧的回路积分

$$A(x,z) = \frac{1}{2\pi}\oint \{\check{\psi}(x,k) - 1\}e^{-ikz}\,dk. \tag{6.4}$$

由于 $\check{\psi}(x,k)$ 在 k 的上半平面解析，所以积分为 0, 即

$$A(x,z) = 0, \quad 当\ z<0 时. \tag{6.5}$$

因此，(6.2) 又可写作

$$\psi(x,k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} K(x,y)e^{iky}\,dy. \tag{6.6}$$

式中 $K(x,y) = A(x, y-x)$. 于是 (6.5) 满足

$$K(x,y) = 0, \qquad \text{当 } y < x \text{ 时}. \tag{6.7}$$

当 k 为实数时，由 (2.22) 和 (3.10), 从上式得

$$\tilde{\psi}(x,k) = e^{-ikx} + \int_x^{\infty} K(x,y)e^{-iky}\,dy, \tag{6.8}$$

且

$$K(x,y) = \text{实数}. \tag{6.9}$$

同理，有

$$\phi(x,k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} N(x,y)e^{-iky}\,dy, \tag{6.10}$$

$$\tilde{\phi}(x,k) = e^{ikx} + \int_{-\infty}^{x} N(x,y)e^{iky}\,dy, \tag{6.11}$$

式中 $N(x,y)$ 是实的，且

$$N(x,y) = 0, \qquad \text{当 } y > x \text{ 时}. \tag{6.12}$$

由 (2.10) 可得

$$a(k)^{-1}\phi(x,k) - e^{-ikx} = \tilde{\psi}(x,k) - e^{-ikx} + r(k)\psi(x,k). \tag{6.13}$$

乘以 $(2\pi)^{-1}e^{iky}$ 后对 k 积分，当 $x < y$ 时，左端可加上对上半平面的大半圆弧的积分，因为 $\mathrm{Re}\,\{-ik(x-y)\} = -\mathrm{Im}\,k(y-x) < 0$. 这样，左端成为一个回路积分.

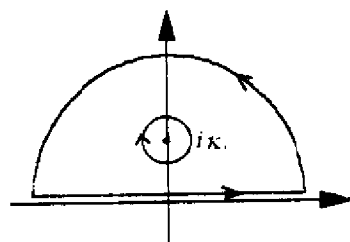


图 6-1 积分回路

由留数计算得

$$i\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\dot{a}(k_n)}\phi(x,k_n)e^{ik_n y}=-\sum_{n=1}^{N}c_n\psi(x,k_n)e^{ik_n y}. \tag{6.14}$$

再利用 (6.6), 上式右端就成为

$$-\sum_{n=1}^{N}c_n\left\{e^{ik_n x}+\int_x^{\infty}K(x,z)e^{ik_n z}\,dz\right\}e^{ik_n y}. \tag{6.15}$$

(6.13) 积分后右端为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_x^{\infty}K(x,z)e^{-ikz}\,dz e^{iky}\,dk$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k)\left\{e^{ikx}+\int_x^{\infty}K(x,z)e^{-ikz}\,dz\right\}e^{iky}\,dk. \tag{6.16}$$

显然, 前一项为 $K(x,y)$, 所以右端为

$$K(x,y)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k)e^{ik(x+y)}\,dk$$

$$+\int_x^{\infty}K(x,z)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k)e^{ik(z+y)}\,dk\,dz. \tag{6.17}$$

将两端合并, 得

$$K(x,y)+F(x+y)+\int_x^{\infty}K(x,z)F(z+y)\,dz=0,\quad x<y, \tag{6.18}$$

式中

$$F(x)=\sum_{n=1}^{N}c_n e^{ik_n x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k)e^{ikx}\,dk. \tag{6.19}$$

方程 (6.18) 为求解 KdV 方程的 **马尔钦柯**(V.A.Marchenko) **反散射方程**, 也称为 **盖尔芳德**(I.M.Gel'fand)-**列维坦** (B.M.Levitan)-**马尔钦柯反散射方程**. 它原则上可以决定 $K(x,y)$.

当 $|k| \to \infty$ 时，由 (6.6) 得

$$\psi(x,k) = e^{ikx} - \frac{1}{ik}K(x,x)e^{ikx} + O(|k|^{-2}). \tag{6.20}$$

与 (5.21) 比较，得 KdV 方程的解 $u(x)$ 与 $K(x,x)$ 的关系：

$$u(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x). \tag{6.22}$$

由 (6.18) 的形式可以看出，

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{N} K(x,k_n)e^{ik_n y} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x,k')e^{ik'y}\,dk'. \tag{6.23}$$

代入 (6.8), 得

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(x,k) = e^{-ikx} &+ \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{i(k-k_n)}K(x,k_n)e^{-i(k-k_n)x} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i(k-k')}K(x,k')e^{-i(k-k')x}\,dk'.\end{aligned} \tag{6.24}$$

所以与 (5.12) 相比得

$$K(x,k_n) = -c_n\psi(x,k_n), \qquad K(x,k') = -\frac{1}{2\pi}\psi(x,k'). \tag{6.25}$$

若将 (6.23) 代入 (6.8), 计及上式，所得的方程就是萨哈诺夫 - 沙巴特方程．可见两种形式的反散射方程是等价的．

§ 7 与时间的相依关系

在以上的讨论中，时间 t 我们往往略去不写．事实上，应当写上，例如 (2.9) 就应写作

$$\phi(x,t,k) = a(t,k)\tilde{\psi}(x,t,k) + b(t,k)\psi(x,t,k). \tag{7.1}$$

但是，此 t 仍只是一纯参数，因为我们未能决定式中依赖 t 的量如何随它变化．现在利用第二个拉克斯方程来决定．

约斯特解 $\phi(x,t,k)$ 由于当 $x\to-\infty$ 时趋于 e^{-ikx}, 独立于 t, 所以它不能满足第二个拉克斯方程．我们引入一个依赖于 t 和 k 的函数 $h(t,k)$, 使得

$$\left\{\partial_t-\hat{M}\right\}h(t,k)\phi(x,t,k)=0. \tag{7.2}$$

取极限 $x\to-\infty$, 得

$$\left\{\partial_t+4\partial_x^3\right\}h(t,k)e^{-ikx}=0. \tag{7.3}$$

即

$$\left\{\partial_t+i4k^3\right\}h(t,k)e^{-ikx}=0. \tag{7.4}$$

所以得到

$$h(t,k)=e^{-i4k^3t}. \tag{7.5}$$

考虑到时间的相依，约斯特解

$$\phi(x,t,k),\quad \tilde{\phi}(x,t,k),\quad \tilde{\psi}(x,t,k),\quad \psi(x,t,k)$$

分别换成

$$\begin{aligned}&h(t,k)\phi(x,t,k),\qquad h^{-1}(t,k)\tilde{\phi}(x,t,k),\\&h(t,k)\tilde{\psi}(x,t,k),\qquad h^{-1}(t,k)\psi(x,t,k).\end{aligned}$$

以 $h(t,k)$ 乘 (7.1), 再以算子 $\{\partial_t-\hat{M}\}$ 作用，取 $x\to\infty$, 这时右端成为

$$\left\{\partial_t+4\partial_x^3\right\}h(t,k)\{a(t,k)e^{-ikx}+b(t,k)e^{ikx}\}=0. \tag{7.6}$$

即

$$h(t,k)\big\{a_t(t,k)e^{-ikx}+\big(b_t(t,k)-i8k^3b(t,k)\big)e^{ikx}\big\}=0. \tag{7.7}$$

所以得到

$$a(t,k)=a(0,k), \quad b(t,k)=b(0,k)e^{i8k^3t}. \tag{7.8}$$

以 $h(t,k_n)$ 乘 (4.7), 再以算子 $\{\partial_t-\hat{M}\}$ 作用，取 $x\to\infty$ 的极限，得

$$\left\{\partial_t+4\partial_x^3\right\}h(t,k_n)b_n(t)e^{ik_nx}=0, \tag{7.9}$$

即

$$h(t,k_n)\big(b_{nt}(t)-i8k_n^3b_n(t)\big)e^{ikx}=0. \tag{7.10}$$

所以得

$$b_n(t)=b_n(0)e^{i8k_n^3t}=b_n(0)e^{8\kappa_n^3t}. \tag{7.11}$$

我们又有

$$c_n(t)=c_n(0)e^{i8k_n^3t}=c_n(0)e^{8\kappa_n^3t}. \tag{7.12}$$

我们看到，反散射方程中所含的量是

$$S=\{r(k),c_n,k_n\}, \tag{7.13}$$

它们称为 **散射数据**, 因为有了它们，一切都定出来了. 由以上的讨论可见，只要将上式换成

$$S(t)=\{r(0,k)e^{i8k^3t},\,c_n(0)e^{i8k_n^3t},\,k_n\}, \tag{7.14}$$

就得到含时间的结果. (7.14) 表示散射数据随时间的演化.

§ 8　1-孤子解

我们现在来看 $N=1$ 这种简单的情况. 这时 (5.18) 为

$$\overline{\psi(x,\bar{k})}=\left\{1+i\frac{1}{k-k_1}c_1\psi(x,k_1)e^{ik_1x}+J(x,k)\right\}e^{-ikx}, \tag{8.1}$$

式中 $J(x,k)$ 由 (5.6) 表示. 在无反射时, 即 $r(k)=0$ 时, 上式更退化为

$$\overline{\psi(x,\bar{k})} = e^{-ikx} + i\frac{1}{k-k_1}c_1\psi(x,k_1)e^{ik_1x}e^{-ikx}. \tag{8.2}$$

(5.21) 化为

$$u_1(x) = -2\frac{d}{dx}R_1(x), \tag{8.3}$$

式中

$$R_1(x) = c_1\psi(x,k_1)e^{ik_1x}. \tag{8.4}$$

在 (8.2) 中取 $k=\bar{k}_1=-i\kappa_1=-k_1$, 得

$$\overline{\psi(x,k_1)} = e^{ik_1x} + i\frac{1}{\bar{k}_1-k_1}c_1\psi(x,k_1)e^{i2k_1x}. \tag{8.5}$$

注意 (4.7) 的结果, $\psi(x,k_1)$ 是实的. 上式也就是

$$\psi(x,k_1) = e^{-\kappa_1x} - \frac{1}{2\kappa_1}c_1\psi(x,k_1)e^{-2\kappa_1x}. \tag{8.6}$$

这样立即得到

$$\psi(x,k_1) = e^{-\kappa_1x}\left\{1+\frac{1}{2\kappa_1}c_1e^{-2\kappa_1x}\right\}^{-1}. \tag{8.7}$$

即 $R_1(x)$ 为

$$c_1\psi(x,k_1)e^{ik_1x} = 2\kappa_1\frac{F_1}{1+F_1}, \tag{8.8}$$

这里

$$F_1 \equiv \frac{1}{2\kappa_1}c_1e^{-2\kappa_1x}, \tag{8.9}$$

已知 κ_1 和 c_1 为正数, 上式可以表为

$$F_1 = e^{-2\theta_1}, \tag{8.10}$$

式中

$$\theta_1=\kappa_1(x-x_1-4\kappa_1^2t). \tag{8.11}$$

这里，我们已计及了 c_1 对时间的相依，式 x_1 为一实常数.

将 (8.8) 代入 (8.3), 得

$$u_1(x,t)=-2\kappa_1^2\operatorname{sech}^2\{\kappa_1(x-x_1-4\kappa_1^2t)\}. \tag{8.12}$$

由于只有当宗量几乎为 0 时，双曲余割的值才显著地不为 0, 所以上式的 $u_1(x,t)$, 对固定的 t, 只在 $x\approx x_1+4\kappa_1 t$ 时才显著地不为 0. 它是一个仅仅在一个小范围下凹的曲线. 当 t 变化时，立即看到，此下凹以速度 $4\kappa_1^2$ 向右运动，下凹的深度与此速度正比，即下凹愈深，速度愈快. 正是如此，解 $u_1(x,t)$ 称为 **1-孤子解**.

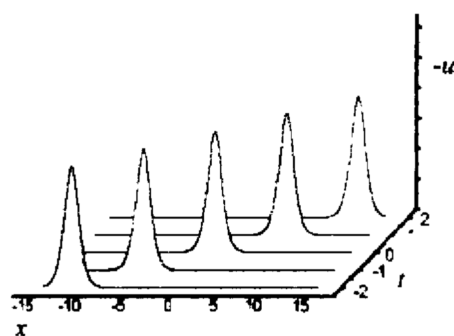


图 8-1　1- 孤子

于是，我们得到，

$$\overline{\psi(x,\bar{k})}=e^{-ikx}+\frac{2k_1}{k-k_1}\frac{F_1}{1+F_1}e^{-ikx}. \tag{8.13}$$

即

$$\tilde{\psi}(x,k)=e^{-ikx}+\frac{2k_1}{k-k_1}\frac{F_1}{1+F_1}e^{-ikx}, \tag{8.14}$$

注意此式中的 k 在下半平面. 由 (8.12) 得

$$\psi(x,k)=e^{ikx}+\frac{2\bar{k}_1}{k-\bar{k}_1}\frac{F_1}{1+F_1}e^{ikx}, \tag{8.15}$$

此式中的 k 在上半平面. 这就是无反射且 $N=1$ 时的约斯特解.

由于无反射，有

$$a(k)=\frac{k-i\kappa_1}{k+i\kappa_1}, \qquad \tilde{a}(k)=\frac{k+i\kappa_1}{k-i\kappa_1}, \tag{8.16}$$

$$\phi(x,k)=a(k)\tilde{\psi}(x,k), \qquad \tilde{\phi}(x,k)=\tilde{a}(k)\psi(x,k). \tag{8.17}$$

于是得

$$\phi(x,k)=e^{-ikx}+\frac{2\bar{k}_1}{k-\bar{k}_1}\frac{1}{1+F_1}e^{-ikx}, \tag{8.18}$$

$$\tilde{\phi}(x,k)=e^{ikx}+\frac{2k_1}{k-k_1}\frac{1}{1+F_1}e^{ikx}. \tag{8.19}$$

§ 9 无反射情况与多孤子解

在无反射的情况下，反散射方程 (5.18) 退化为

$$\overline{\psi(x,\bar{k})}=\{1+R(x,k)\}e^{-ikx}. \tag{9.1}$$

取 $k=\bar{k}_m=-k_m$, 注意这时 $\psi(x,k_m)$ 是实的，由 (3.10), 上式化为

$$\psi(x,i\kappa_m)=e^{-\kappa_m x}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\kappa_m+\kappa_n}c_n\psi(x,i\kappa_n)e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}. \tag{9.2}$$

这时解 $u_N(x,t)$ 为

$$u_N(x,t)=-2\frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{N}c_n\psi(x,\kappa_n)e^{-\kappa_n x}\right\}. \tag{9.3}$$

引入记号

$$\Psi_n=\sqrt{c_n}\psi(x,i\kappa_n), \tag{9.4}$$

$$f_n=\sqrt{c_n}\,e^{-\kappa_n x}, \tag{9.5}$$

$$B_{nm}=f_n\frac{1}{\kappa_n+\kappa_m}f_m, \tag{9.6}$$

则方程 (9.2) 可以写作

$$\Psi_m=f_m-\sum_{n=1}^{N}\Psi_n B_{nm}, \tag{9.7}$$

或为矩阵形式

$$\Psi = f - \Psi B. \tag{9.8}$$

另一方面，有

$$u_N = -2\frac{d}{dx}D_N, \tag{9.9}$$

式中

$$D_N = \sum_{n=1}^{N} f_n \Psi_n = \Psi f^T. \tag{9.10}$$

以 (9.7) 代入，得

$$D_N = f(I+B)^{-1}f^T = \mathrm{tr} f^T f(I+B)^{-1}. \tag{9.11}$$

注意

$$B_x = -f^T f, \quad \frac{d}{dx}B_{nm} = -f_n f_m, \tag{9.12}$$

就得到

$$D_N = -\mathrm{tr}B_x(I+B)^{-1} = -\frac{d}{dx}\ln\det(I+B), \tag{9.13}$$

最后的结果是

$$u_N = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\det(I+B). \tag{9.14}$$

容易看出

$$\det(I+B) = 1 + \sum_{r=1}^{N}\sum_{1\le n_1<n_2<\cdots<n_r\le N} B(n_1, n_2, ..., n_r), \tag{9.15}$$

式中 $B(n_1, n_2, ..., n_r)$ 是矩阵 B 的 r 阶的主子式，也就是矩阵 B 保留第 $(n_1, n_2, ..., n_r)$ 行和列而得子矩阵的行列式．我们注意由矩阵元 $(p_j+q_k)^{-1}$ 组成的矩阵的行列式之值为

$$\prod_{n,m}(p_n+q_m)^{-1}\prod_{n<n', m<m'}(p_n-p_{n'})(q_m-q_{m'}), \tag{9.16}$$

于是不难得到

$$B(n_1,n_2,...,n_r)=\prod_n f_n^2(2\kappa_n)^{-1}\prod_{n<m}\frac{(\kappa_n-\kappa_m)^2}{(\kappa_n+\kappa_m)^2}. \tag{9.17}$$

也就是

$$B(n_1,n_2,...,n_r)=\prod_n F_n a_n^{-1}(2\kappa_n)^{-1}\prod_{n<m}\frac{(\kappa_n-\kappa_m)^2}{(\kappa_n+\kappa_m)^2}. \tag{9.18}$$

这里

$$F_n=b_ne^{-2\kappa_nx}=(-1)^{(n-1)}e^{-2\theta_n}, \tag{9.19}$$

$$\theta_n=\kappa_n(x-x_n-4\kappa_n^2t), \tag{9.20}$$

式中 x_n 是实常数. (9.19) 中的因子 $(-1)^{(n-1)}$ 源于 (4.19). 注意到 (4.16),(9.17) 又可以写作

$$B(n_1,n_2,...,n_r)=\prod_n |F_n||a_n|^{-1}(2\kappa_n)^{-1}\prod_{n<m}\frac{(\kappa_n-\kappa_m)^2}{(\kappa_n+\kappa_m)^2}, \tag{9.21}$$

于是我们就得到了 KdV 方程的多孤子解的显式.

§ 10　2-孤子解

由以上得到的一般公式, 可以简单得到 1- 和 2- 孤子解. 当 $N=1$ 时, (4.16) 给出

$$a_1=\frac{1}{2\kappa_1}, \tag{10.1}$$

由 (8.14) 和 (9.2), 我们有

$$\det(I+B)=1+B(1)=1+F_1=1+e^{-2\theta_1}. \tag{10.2}$$

代入 (8.13), 即得到 1- 孤子解.

当 $N=2$ 时，(4.16) 给出

$$a_1 = \frac{1}{2\kappa_1}\frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}, \qquad a_2 = \frac{1}{2\kappa_2}\frac{\kappa_2-\kappa_1}{\kappa_2+\kappa_1}. \tag{10.3}$$

由 (8.14) 和 (9.2), 我们有

$$\begin{aligned}\det(I+B) &= 1 + B(1) + B(2) + B(1,2) \\ &= 1 + \frac{\kappa_1-\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\left(e^{-2\theta_1}+e^{-2\theta_2}\right) + e^{-2\theta_1-2\theta_2}.\end{aligned} \tag{10.4}$$

代入 (8.13), 得

$$u_2(x,t) = -2(\kappa_1^2-\kappa_2^2)\frac{\kappa_1^2\operatorname{csch}^2\theta_1 + \kappa_2^2\operatorname{sech}^2\theta_2}{(\kappa_1\operatorname{cth}\theta_1 - \kappa_2\operatorname{th}\theta_2)^2}. \tag{10.5}$$

这就是 KdV 方程的 2- 孤子解. 我们注意由于 $\kappa_1>\kappa_2$, 不管 x 和 t 取何值，上式的分母恒不为 0. 也就是说，解 $u_2(x,t)$ 是正则的.

现在来看，当 $|\theta_1|\approx 0$ 而 $|\theta_2|>>1$ 的情况，这时有

$$u_2 \approx -2(\kappa_1^2-\kappa_2^2)\frac{\kappa_1^2\operatorname{csch}^2\theta_1}{(\kappa_1\operatorname{cth}\theta_1 \mp \kappa_2)}. \tag{10.6}$$

这里分母中 κ_2 前的符号，“$-$”号对应于 $\theta_2>>1$; 而“$+$”号对应于 $\theta_2<<-1$ 的情况. 上式可以写成如下形式：

$$u_2 \approx -2\kappa_1^2\operatorname{sech}^2(\theta_1 \mp \varDelta), \tag{10.7}$$

式中

$$\varDelta = \operatorname{Arcth}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\kappa_1+\kappa_2}{\kappa_1-\kappa_2}\right). \tag{10.8}$$

师

当 $|\theta_2|\approx 0$ 而 $|\theta_1|>>1$ 时，就有

$$u_2 \approx -2(\kappa_1^2-\kappa_2^2)\frac{\kappa_2^2\operatorname{sech}^2\theta_2}{(\pm\kappa_1 - \kappa_2\operatorname{th}\theta_2)}, \tag{10.9}$$

这里，分母中 κ_1 前的符号，“+”号对应于 $\theta_1 >> 1$，而“−”号对应于 $\theta_1 << -1$ 的情况. 上式可以写成如下形式：

$$u_2 \approx -2\kappa_2^2 \operatorname{sech}^2(\theta_2 \pm \varDelta). \tag{10.10}$$

也就是说，注意 $\kappa_1 > \kappa_2$，当 $t >> 1$ 时，有

$$u_2 \approx -2\kappa_1^2 \operatorname{sech}^2(\theta_1 - \varDelta) - 2\kappa_2^2 \operatorname{sech}^2(\theta_2 + \varDelta). \tag{10.11}$$

而当 $t << -1$ 时，有

$$u_2 \approx -2\kappa_1^2 \operatorname{sech}^2(\theta_1 + \varDelta) - 2\kappa_2^2 \operatorname{sech}^2(\theta_2 - \varDelta). \tag{10.12}$$

这表示，当 $|t|$ 充分增大时，2- 孤子解分开为两个 1- 孤子解的和. 我们看到，在 $t << -1$ 时，彼此分开的两个单孤子，在相互作用之后，在 $t >> 1$ 时，再分开为两个单孤子，只是孤子中心发生了附加的移动. 对第 1 个单孤子，由 $t << -1$ 到 $t >> 1$，孤子中心的附加移动为

$$\varDelta x_1 = -\frac{1}{2\kappa_1} 2\varDelta = -\frac{1}{\kappa_1} \ln\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}\right). \tag{10.13}$$

而第 2 个单孤子，由 $t << -1$ 到 $t >> 1$，孤子中心的附加移动为

$$\varDelta x_2 = \frac{1}{2\kappa_2}(-2\varDelta) = -\frac{1}{\kappa_2} \ln\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}\right). \tag{10.14}$$

这表明，快孤子由于碰撞所得到的附加中心移动向前 $\varDelta x_1 > 0$，而慢孤子由于碰撞所得到的附加中心移动向后 $\varDelta x_2 < 0$. 正是孤子在相互作用前后保持同样的形状的性质，所以才称之为孤子. 对于多个孤子间的相互作用，下一节再来研究.

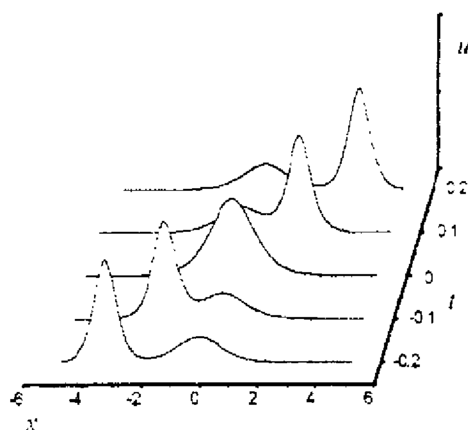


图 10-1 2- 孤子

这里我们注意：

(1) 如果将 u 变号，则得到如下形式的 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{10.15}$$

所以这一方程的解也只是 (1.1) 形式的 KdV 方程的解的反号.

(2) 对于 KdV 方程 (1.1) 在边值非 0 时的求解，即代替 (1.2), 取

$$u \to c\ (\text{实常数}), \qquad\qquad \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时} \tag{10.16}$$

的求解，看起来有意义，但事实上是不必要的. 取

$$w = u - c, \tag{10.17}$$

代入 (1.1), 得

$$w_t - 6(w + c)w_x + w_{xxx} = 0, \tag{10.18}$$

且 w 的边值为 0. 作伽利略变换

$$X = x + 6ct, \qquad T = t. \tag{10.19}$$

定义 $W(X, T)$ 为

$$W(X, T) = w(X - 6cT, T). \tag{10.20}$$

代入 (10.15), 即得

$$W_T - 6WW_X + W_{XXX} = 0 \tag{10.21}$$

和 W 的边值为 0. 这与我们原来在 0 边值 (1.2) 下求解 KdV 方程 (1.1) 的问题完全一样.

§ 11 N-孤子解的渐近行为

前面说过，κ_n 都是正的，且

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \cdots > \kappa_N. \tag{11.1}$$

以 Ω_n 表示 $x = x_n + 4\kappa_n t$ 的邻域，即 Ω_n 包含与 $x_n + 4\kappa_n t$ 邻近的点. 当 $t \to +\infty$ 时，这些邻域彼此分开从左到右如

$$\Omega_N \quad \Omega_{N-1} \quad \Omega_{N-2} \quad \cdots \quad \Omega_1. \tag{11.2}$$

在邻域 Ω_j 中,

$$x - x_n - 4\kappa_n t \to -\infty, \qquad \text{若} \quad n < j, \tag{11.3}$$

且

$$|F_n| \to +\infty. \tag{11.4}$$

类似地，有

$$x - x_m - 4\kappa_m t \to +\infty, \qquad \text{若} \quad m > j, \tag{11.5}$$

且

$$|F_m| \to 0. \tag{11.6}$$

因此，当 $t \to +\infty$ 时，在邻域 Ω_j 中，有

$$\det(I + B) \approx B(1, 2, \cdots, j-1) + B(1, 2, \cdots, j-1, j), \tag{11.7}$$

因为这时只保留正比于 $F_1 F_2 \cdots F_{j-1}$ 的项.

由 (9.5), 显然有

$$B(1, 2, \cdots, j-1, j) = B(1, 2, \cdots, j-1)|F_j^{(+)}|, \tag{11.8}$$

这里

$$|F_j^{(+)}| = |F_j||a_j|^{-1}(2\kappa_j)^{-1}\prod_{n=1}^{j-1}\frac{(\kappa_j - \kappa_n)^2}{(\kappa_j + \kappa_n)^2}. \tag{11.9}$$

我们再把它写作

$$|F_j^{(+)}| = |F_j|\alpha_j\beta_j^{-1}, \tag{11.10}$$

这里

$$\alpha_j = \prod_{n=1}^{j-1}\left|\frac{\kappa_j - \kappa_n}{\kappa_j + \kappa_n}\right|, \tag{11.11}$$

$$\beta_j = \prod_{m=j+1}^{N} \left| \frac{\kappa_j - \kappa_m}{\kappa_j + \kappa_m} \right|. \tag{11.12}$$

因此， $F_j^{(+)}$ 可以写作

$$F_j^{(+)} = (-1)^{(j-1)} e^{-2\theta_j^{(+)}}, \tag{11.13}$$

式中

$$\theta_j^{(+)} = \kappa_j(x - x_j - 4\kappa_j^2 t - \Delta x_j^{(+)}), \tag{11.14}$$

$$\Delta x_j^{(+)} = -\frac{1}{2\kappa_j} (\ln \alpha_j - \ln \beta_j). \tag{11.15}$$

于是，有

$$\ln \det(I + B) \approx \ln B(1, 2, \cdots, j-1) + \ln(1 + |F_j^{(+)}|). \tag{11.16}$$

右端第一项对 x 的二次微商为 0, 所以有贡献的只是第二项. 于是得到，当 $t \to +\infty$ 时，在邻域 Ω_j 中， N- 孤子解近似为

$$u_N \approx -2\kappa_j^2 \operatorname{sech} \kappa_j (x - x_j - 4\kappa_j^2 t - \Delta x_j^{(+)}). \tag{11.17}$$

类似地，当 $t \to -\infty$ 时，在邻域 Ω_j 中， N- 孤子解近似为

$$u_N \approx -2\kappa_j^2 \operatorname{sech} \kappa_j (x - x_j - 4\kappa_j^2 t - \Delta x_j^{(-)}), \tag{11.18}$$

这里

$$\Delta x_j^{(-)} = -\Delta x_j^{(+)}. \tag{11.19}$$

我们已经看到，具有不同速度的孤子，若在 $t \to -\infty$ 时彼此分开，在相互作用后，在 $t \to +\infty$ 时，又成为彼此分开的孤子，形状和速度都不变，只是发生了孤子中心的附加移动. 对于第 j 个孤子，中心的附加移动是

$$\Delta x_j = \Delta x_j^{(+)} - \Delta x_j^{(-)} = -\frac{1}{\kappa_j}(\alpha_j - \beta_j). \tag{11.20}$$

也就是

$$\Delta x_j = -\frac{1}{\kappa_j}\left(\sum_{n=1}^{j-1}\ln\left|\frac{\kappa_j-\kappa_n}{\kappa_j+\kappa_n}\right| - \sum_{m=j+1}^{N}\ln\left|\frac{\kappa_j-\kappa_m}{\kappa_j+\kappa_m}\right|\right). \tag{11.21}$$

我们看到，当 $N=2$ 时，(11.21) 的结果正是在 (10.13) 和 (10.14) 中已经得到了的.

§ 12 无穷多个守恒律

现在我们来看，一维薛定谔方程 (2.3) 当 $|k|\to\infty$ 时的渐近解与位 u 和它的导数间的关系. 由 (2.5), 取

$$\phi(x,k) = e^{-ikx+\check{\phi}(x,k)}. \tag{12.1}$$

按 (2.5), 我们要求

$$\check{\phi}(-\infty,k) = 0. \tag{12.2}$$

用函数 $\check{\phi}(x,k)$ 表出， (2.3) 成为

$$\check{\phi}_{xx} - i2k\check{\phi}_x + \left(\check{\phi}_x\right)^2 = u. \tag{12.3}$$

这是 $\check{\phi}_x$ 的黎卡提 (J.F.Riccati) 方程. 可以用下列展开来求解：

$$\check{\phi}_x(x,k) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mu_j(x)}{(i2k)^j}. \tag{12.4}$$

代入 (12.3), 并让 k 的各次幂的项相抵，得到

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = -u, \quad \mu_2 = \mu_{1x} = -u_x, \tag{12.5}$$

和

$$\mu_j = \mu_{(j-1)x} + \sum_{l=0}^{j}\mu_l\mu_{j-l}, \quad j\geq 3. \tag{12.6}$$

由此得

$$\mu_3 = -u_{xx} + u^2, \quad \mu_4 = -u_{xxx} + 4uu_x, \tag{12.7}$$

$$\mu_5 = -u_{xxxx} + 5(u_x)^2 + 6uu_{xx} - 2u^3, \tag{12.8}$$

等等.

我们看到, μ_2 和 μ_4 是全微分. 事实上, 所有的带偶数下标的 μ_{2m} 都是全微分. 在 (12.3) 中取 k 为实数, 并将 $\check{\phi}_x(x,k)$ 写成实部和虚部之和的形式:

$$\check{\phi}_x = \chi_R + i\chi_I, \tag{12.9}$$

代入 (12.3), 得到

$$\chi_{Ix} + 2\chi_R\chi_I - 2k\chi_R = 0. \tag{12.10}$$

由此可得

$$\chi_R = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(\chi_I - k). \tag{12.11}$$

即 $\chi_R(x)$ 是全微分. $\mu_{2m}(x)$ 显然是 $\chi_R(x)$ 的渐近展开系数.

由 (2.10), 得

$$\phi(x,k) \sim \begin{cases} e^{-ikx}, & \text{当} x \to -\infty \text{时;} \\ a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, & \text{当} x \to \infty \text{时,} \end{cases} \tag{12.12}$$

因此, 当 $x \to \infty$ 且 $\text{Im}\, k > 0$ 时, 有

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x,k)e^{ikx} \to a(k). \tag{12.13}$$

与 (12.1) 比较, 得

$$\check{\phi}(\infty, k) = \ln a(k). \tag{12.14}$$

由于 (12.13), 将 (12.4) 对 x 积分, 得

$$\check{\phi}(\infty, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(i2k)^j} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_j(x)\, dx. \tag{12.15}$$

另一方面，当 $|k|\to\infty$ 时有 $a(k)\to 1$, 所以在此极限下有

$$\ln a(k)\to 0. \tag{12.16}$$

因此，引入

$$\ln a(k)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{I_j}{(i2k)^j}, \tag{12.17}$$

由此得

$$I_j=\int_{-\infty}^{\infty}\mu_j(x)\,dx. \qquad j=1,2,3,\cdots. \tag{12.18}$$

因为偶数下标的 μ_{2m} 为对 x 的全微分，及 u 的 0 边值条件，所以偶数下标的 $I_{2m}=0$. 由于 $a(k)$ 独立于 t, 所以这些量 I_j 也都是守恒的．于是，我们得到无穷多个守恒律．其开头几个为

$$I_1=-\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\,dx, \qquad I_3=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)^2\,dx, \tag{12.19}$$

$$I_5=-\int_{-\infty}^{\infty}\{u_x(x)^2+3u(x)^2\}\,dx, \tag{12.20}$$

等等.

由 (4.26), 有

$$\ln a(k)=\sum_{n=1}^{N}\ln\frac{k-i\kappa_n}{k+i\kappa_n}+\frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|a(k')|^2}{k'-k-i0}\,dk'. \tag{12.21}$$

当 $|k|\to\infty$ 时对 $1/k$ 作展开，由于 (2.24), 得 $|a(-k)|=|a(k)|$, 所以上式的展开中 $1/k$ 的偶次幂为 0, 即

$$\ln a(k)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{i}{k^{2j+1}}\left\{\frac{2(-1)^{j+1}}{2j+1}\sum_{n=1}^{N}\kappa_n^{2j+1}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}k^{2j}\ln|a(k)|^2\,dk\right\}. \tag{12.22}$$

注意 (12.17) 中的求和实际上只对奇数下标，与 (12.17) 相比较，得到

$$I_{2j+1} = 2^{2j+1}\left\{\frac{1}{2j+1}\sum_{n=1}^{N}\kappa_n^{2j+1} + (-1)^{j+1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} k^{2j}\ln|a(k)|^2\,dk\right\}. \qquad (12.23)$$

其中 $-2I_5 = H$ 为哈密顿量，

$$H = -\frac{32}{5}\sum_{n=1}^{N}\kappa_n^5 + \frac{16}{\pi}\int_0^{\infty} k^4\ln|a(k)|^2\,dk. \qquad (12.24)$$

值得注意的是，分离谱对能量的贡献是负的，而连续谱的贡献是正的 (因为已经得到 $|a(k)| \geq 1$).

第 2 章

NLS 方程

非线性薛定谔方程 (NLS 方程) 是一个重要的非线性演化方程. 它可用来描述譬如在反常群速色散范围内的短脉冲 (皮秒, 10^{-12} 秒量级) 在单模光纤中的传播. 若干年前, 它已被证明是完全可积的, 已由萨哈诺夫和沙巴特用反散射变换方法求解. 求得了一种称为孤子解的特殊形式的解. 本章我们讨论 NLS 方程在零边值条件下用反散射变换方法的求解. 在萨哈诺夫和沙巴特的工作中, 首先找到了 NLS 方程所对应的拉克斯方程的形式. 我们知道, 反散射方程的主要手续, 是从第一个拉克斯方程出发的, 所以若某一非线性方程所对应的拉克斯方程的第一个与 NLS 方程的拉克斯方程的第一个有同样的形式, 反散射方法就基本一样. 譬如变型的 KdV 方程 (MKdV 方程) 就是如此. 由于阿布罗维茨 (M.J.Ablowitz), 考普 (D.J.Kaup), 纽维尔 (A.C.Newell) 和色谷 (H.Segur)(简称 AKNS) 的工作, 发现正弦 - 戈登 (W.Gordon)(SG) 方程也是如此. 如果一个非线性方程, 它的第一个拉克斯方程与 NLS 方程的有同样的形式, 就称为属于 ZS/AKNS 型的方程. 这一型的方程是极重要的一类, 所以本章对 NLS 方程的反散射方法作比较详细的推导, 为以下的进一步工作作有效的准备.

§ 13 NLS方程和它的拉克斯对

NLS 方程可以表为

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0, \tag{13.1}$$

这里 u 是复的，它在零边值条件

$$u \to 0, \qquad \text{当 } |x| \to \infty \text{时} \tag{13.2}$$

下的求解，首先是由萨哈诺夫和沙巴特扩充反散射变换方法后而系统解决的，并且显式地得到了孤子解. NLS 方程的孤子解具有一些与 KdV 方程的孤子解不同的特征. 这一解法的要点也是首先引入一对线性方程

$$\hat{L}F(x,t,\lambda) = \lambda F(x,t,\lambda) \tag{13.3}$$

和

$$\partial_t F(x,t,\lambda) = \hat{M}F(x,t,\lambda), \tag{13.4}$$

这里 (13.3) 中的 $\hat{L}$ 是一个线性算子， λ 是本征值， $F(x,t,\lambda)$ 是相应的本征函数. (13.4) 中的 $\hat{M}$ 是另一个线性算子，它描写本征函数 $F(x,t,\lambda)$ 随时间的演化. 今后，我们往往略去 t, 有时也略去 x. 如果这一对方程是相容的，且 λ 独立于 t, 即

$$\lambda_t = 0, \tag{13.5}$$

就有

$$\hat{L}_t - [\hat{L}, \hat{M}] = 0. \tag{13.6}$$

现在选取

$$\hat{L} = i\sigma_3\partial_x + iU(x,t)\sigma_3 \tag{13.7}$$

和

$$\hat{M} = i2\sigma_3\partial_x^2 + i2U(x,t)\sigma_3\partial_x - i\{U^2(x,t) - U_x(x,t)\}\sigma_3, \tag{13.8}$$

式中 $U(x,t)$ 是一个 2×2 的矩阵,

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x,t) \\ -\overline{u(x,t)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.9}$$

因此，解 $F(x,t,\lambda)$ 是 1×2 矩阵．（13.6）就是

$$iU_t\sigma_3 = U_{xx} - 2U^3, \tag{13.10}$$

以 (13.9) 代入，可见它等价于 NLS 方程 (13.1)．如果 $u(x,t)$ 是 NLS 方程的解，(13.6) 就成立，因而 (13.5) 也成立，即 λ 独立于 t.

这里的方程 (13.3) 和 (13.4)，连同表示式 (13.7) 至 (13.9)，称为 NLS 方程的 **拉克斯方程**．注意这里的本征方程 (13.3) 中的算子 $\hat{L}$ 不是自共轭算子，虽然 $i\sigma_3\partial_x$ 是自共轭算子，但 $iU\sigma_3$ 不是．所以

$$\hat{L}^H \neq \hat{L}. \tag{13.11}$$

这里的上角 H 表示厄米特共轭．于是得到方程 (13.3) 的本征值不必是实数，而可以是复数．

将方程 (13.3) 左乘以 $-i\sigma_3$ 后再移项，方程 (13.3) 就改写为

$$\partial_x F(x,t,\lambda) = L(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda), \tag{13.12}$$

式中

$$L(x,t,\lambda) = -i\lambda\sigma_3 + U(x,t). \tag{13.13}$$

类似地，方程 (13.4) 可以改写为

$$\partial_t F(x,t,\lambda) = M(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda), \tag{13.14}$$

这里

$$M(x,t,\lambda) = -i2\lambda^2\sigma_3 + 2\lambda U(x,t) - i\{U^2(x,t) + U_x(x,t)\}\sigma_3. \tag{13.15}$$

(13.12) 和 (13.14) 当然与 (13.3) 和 (13.4) 等价．(13.12) 和 (13.14) 的相容性条件，即 $F(x,t,\lambda)$ 对 x 和 t 的交叉微商相等，导出

$$L_t - M_x + [L,M] = 0. \tag{13.16}$$

它自然与 (13.6) 等价，同样也给出 NLS 方程 (13.1)．我们以下采用 (13.12) 和 (13.14).

§ 14　正散射问题

在讨论散射问题时，t 只是一参数，我们略去它．假定 $u(x)$ 当 $|x| \to \infty$ 时充分快地趋于 0, 方程 (13.13) 这时的渐近方程为

$$\partial_x E(x,\lambda) = -i\lambda\sigma_3 E(x,\lambda). \tag{14.1}$$

显然，它的解是

$$E(x,\lambda) = e^{-i\lambda x\sigma_3}. \tag{14.2}$$

其实，它是两个独立的二分量解：

$$E_{\cdot 1}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}, \quad E_{\cdot 2}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}. \tag{14.3}$$

利用渐近条件定义方程 (13.13) 的解：

$$\Phi(x,\lambda) \to e^{-i\lambda x\sigma_3}. \qquad \text{当 } x \to -\infty \text{时} \tag{14.4}$$

这时可得积分方程

$$\Phi(x,\lambda) = e^{-i\lambda x\sigma_3} + \int_{-\infty}^{x} e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3} U(y)\Phi(y,\lambda)\,dy. \tag{14.5}$$

显然 (14.5) 满足边界条件 (14.4) 和方程 (13.13).

写下

$$\Phi(x,\lambda) = \big(\phi(x,\lambda),\ \ \tilde{\phi}(x,\lambda)\big), \tag{14.6}$$

边界条件也就是

$$\phi(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}, \qquad \text{当 } x \to -\infty \text{ 时} \tag{14.7}$$

和

$$\tilde{\phi}(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}. \qquad \text{当 } x \to -\infty \text{ 时} \tag{14.8}$$

同理，我们定义

$$\Psi(x,\lambda) \to e^{-i\lambda x\sigma_3}, \qquad \text{当 } x\to\infty \text{时} \tag{14.9}$$

写下

$$\Psi(x,\lambda) = \big(\tilde{\psi}(x,\lambda), \quad \psi(x,\lambda)\big), \tag{14.10}$$

上式也就是

$$\tilde{\psi}(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}, \qquad \text{当 } x\to\infty \text{ 时} \tag{14.11}$$

和

$$\psi(x,\lambda) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}. \qquad \text{当 } x\to\infty \text{ 时} \tag{14.12}$$

以上由边值条件定义的 $\phi(x,\lambda)$,$\tilde{\phi}(x,\lambda)$ $\tilde{\psi}(x,\lambda)$ 和 $\psi(x,\lambda)$, 称为方程 (13.13) 的 **约斯特解**. 由于 $\phi(x,\lambda)$ 和 $\tilde{\phi}(x,\lambda)$ 的渐近行为不同，所以它们是方程 (13.13) 在 λ 取实数值时的两个独立解. 同理可以得到，$\tilde{\psi}(x,\lambda)$ 和 $\psi(x,\lambda)$ 也是两个独立解. 由于方程 (13.13) 是二分量的一阶微分方程，方程 (13.13) 只有两个独立解. 所以，以上两组独立解彼此可以表为线性组合.

引入 **单式**(Monodromy)**矩阵** $T(\lambda)$,

$$\Phi(x,\lambda) = \Psi(x,\lambda)T(\lambda), \tag{14.13}$$

式中

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(t,\lambda) & -\tilde{b}(t,\lambda) \\ b(t,\lambda) & \tilde{a}(t,\lambda) \end{pmatrix}. \tag{14.14}$$

将 (14.6) 和 (14.10) 代入 (14.13), 得到

$$\phi(x,\lambda) = a(\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda) + b(\lambda)\psi(x,\lambda) \tag{14.15}$$

和

$$\tilde{\phi}(x,\lambda) = -\tilde{b}(\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda) + \tilde{a}(\lambda)\psi(x,\lambda). \tag{14.16}$$

当 λ 为实数时，容易看出，

$$\sigma_2\overline{L(x,\lambda)}\sigma_2 = L(x,\lambda). \tag{14.17}$$

所以 $\sigma_2\overline{\Phi(x,\lambda)}\sigma_2$ 也满足方程 (13.13), 而且与 $\Phi(x,\lambda)$ 的边界条件一样. 所以

$$\sigma_2\overline{\Phi(x,\lambda)}\sigma_2 = \Phi(x,\lambda), \tag{14.18}$$

或以二分量解写出

$$\tilde{\phi}(x,\lambda) = i\sigma_2\overline{\phi(x,\lambda)}. \tag{14.19}$$

同理，有

$$\sigma_2\overline{\Psi(x,\lambda)}\sigma_2 = \Psi(x,\lambda), \tag{14.20}$$

或以二分量解写出

$$\tilde{\psi}(x,\lambda) = -i\sigma_2\overline{\psi(x,\lambda)}. \tag{14.21}$$

由此，得

$$\sigma_2\overline{T(\lambda)}\sigma_2 = T(\lambda), \tag{14.22}$$

即

$$\tilde{a}(\lambda) = \overline{a(\lambda)}, \qquad \tilde{b}(\lambda) = \overline{b(\lambda)}. \tag{14.23}$$

由 (13.13) 可见 $\partial_x \det \Phi(x,\lambda) = 0$, 因而容易得到

$$\det \Phi(x,\lambda) = \det \Psi(x,\lambda) = \det E(x,\lambda) = 1. \tag{14.24}$$

所以

$$\det T(\lambda) = 1, \tag{14.25}$$

即

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1. \tag{14.26}$$

由于 (14.24), 我们容易求得 $T^{-1}(\lambda)$ 和 $\Psi^{-1}(x,\lambda)$, 于是得到

$$\Psi(x,\lambda)=\Phi(x,\lambda)T^{-1}(\lambda), \tag{14.27}$$

即

$$\tilde{\psi}(x,\lambda)=\tilde{a}(t,\lambda)\phi(x,\lambda)-b(t,\lambda)\tilde{\phi}(x,\lambda), \tag{14.28}$$

$$\psi(x,\lambda)=\tilde{b}(t,\lambda)\phi(x,\lambda)+a(t,\lambda)\tilde{\phi}(x,\lambda). \tag{14.29}$$

同样，可得

$$T(\lambda)=\Psi^{-1}(x,\lambda)\Phi(x,\lambda), \tag{14.30}$$

即

$$a(\lambda)=W\big[\phi(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\big], \tag{14.31}$$

$$b(\lambda)=W\big[\tilde{\psi}(x,\lambda),\phi(x,\lambda)\big], \tag{14.32}$$

$$\tilde{a}(\lambda)=W\big[\tilde{\psi}(x,\lambda),\tilde{\phi}(x,\lambda)\big] \tag{14.33}$$

和

$$\tilde{b}(\lambda)=W\big[\tilde{\phi}(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\big]. \tag{14.34}$$

这里，朗斯基行列式为

$$W\big[\phi(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\big]=\det\big(\phi(x,\lambda)\ \psi(x,\lambda)\big). \tag{14.35}$$

将 (14.15) 改写为

$$a(\lambda)^{-1}\phi(x,\lambda)=\tilde{\psi}(x,\lambda)+r(\lambda)\psi(x,\lambda), \tag{14.36}$$

式中

$$r(\lambda)=\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}. \tag{14.37}$$

(14.36) 有简单的物理解释. 当 $x\to\infty$ 时，右端趋于

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}+r(\lambda)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda x},$$

当 $x \to -\infty$ 时，左端趋于

$$a(\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}.$$

由此可以解释如下：左行波 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}$ 从右方入射，经过位的作用，一部分 $a(\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}$ 透射到左方，为透射波，另一部分 $r(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}$ 被反射回右方，为反射波．由 (14.26) 容易得到

$$|t(\lambda)|^2 - |r(\lambda)|^2 = 1, \tag{14.38}$$

式中

$$t(\lambda) = a(\lambda)^{-1}. \tag{14.39}$$

(14.38) 与通常的概率守恒所得的，如第 1 章 KdV 方程中的 (2.14)，不同，因为这里的算子 $\hat{L}$ 不是自共轭的．

§ 15 约斯特解的解析性

由 (14.5)，可以得到下列积分方程，

$$\phi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3} U(y)\phi(y,\lambda)\, dy. \tag{15.1}$$

不难看出，(15.1) 满足边界条件 (14.4) 和方程 (13.13)．方程 (15.1) 以分量写出，为

$$\phi_1(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int_{-\infty}^{x} e^{-i\lambda(x-y)} u(y)\phi_2(y,\lambda)\, dy \tag{15.2}$$

和

$$\phi_2(x,\lambda) = -\int_{-\infty}^{x} e^{i\lambda(x-y)} \overline{u(y)}\phi_1(y,\lambda)\, dy. \tag{15.3}$$

引入函数

$$\check{\phi}(x,\lambda)=\phi(x,\lambda)e^{i\lambda x}. \tag{15.4}$$

由 (15.2) 和 (15.3), 得

$$\check{\phi}_1(x,\lambda)=1-\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}u(y)\overline{u(z)}e^{i2\lambda(y-z)}\check{\phi}_1(z,\lambda)\,dz\,dy. \tag{15.5}$$

应用迭代，可以得到诺依曼展开,

$$\begin{aligned}\check{\phi}_1(x,\lambda)=1&-\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x_1}u(x_1)\overline{u(x_2)}e^{i2\lambda(x_1-x_2)}\,dx_2\,dx_1\\&+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_3}u(x_1)\overline{u(x_2)}e^{i2\lambda(x_1-x_2)}\\&\qquad\cdot u(x_3)\overline{u(x_4)}e^{i2\lambda(x_3-x_4)}\,dx_4\,dx_3\,dx_2\,dx_1\\&+\cdots.\end{aligned} \tag{15.6}$$

当 λ 取复值，且 $\operatorname{Im}\lambda>0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}|\check{\phi}_1(x,\lambda)|\le 1&+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x_1}|u(x_1)||u(x_2)|\,dx_2\,dx_1\\&+\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_3}|u(x_1)||u(x_2)|\\&\qquad\cdot|u(x_3)||u(x_4)|\,dx_4\,dx_3\,dx_2\,dx_1+\cdots.\end{aligned} \tag{15.7}$$

利用交换积分次序等手续，可以得到

$$|\check{\phi}_1(x,\lambda)|\le 1+\frac{1}{2!}M(x)^2+\frac{1}{4!}M(x)^4+\cdots\le e^{M(x)}, \tag{15.8}$$

式中

$$M(x)=\int_{-\infty}^{x}|u(y)|\,dy. \tag{15.9}$$

若 $u(x)$ 是绝对可积的，即

$$M(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} |u(y)|\, dy < \infty, \tag{15.10}$$

则诺依曼展开式 (15.6) 对于 $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ 是绝对收敛的和一致收敛的．因而在复 λ 的上半平面定义一个解析函数．所以 $\check{\phi}_1(x,\lambda)$, 因而 $\phi_1(x,\lambda)$ 可以解析延拓到复 λ 的上半平面．同样地， $\phi_2(x,\lambda)$ 也可以解析延拓到复 λ 的上半平面．这样 $\phi(x,\lambda)$ 可以解析延拓到复 λ 的上半平面．同理， $\psi(x,\lambda)$ 也可以解析延拓到复 λ 的上半平面．由 (14.30), $a(\lambda)$ 可以解析延拓到复 λ 的上半平面．

类似地可以证明， $\tilde{\phi}(x,\lambda)$、$\tilde{\psi}(x,\lambda)$ 和 $\tilde{a}(\lambda)$ 可以解析延拓到 λ 的下半平面．但 $b(\lambda)$ 和 $\tilde{b}(\lambda)$ 一般不能解析延拓到实轴之外．

当 λ 取复值时，以上某些公式要修改．如 (14.20)、(14.21) 和 (14.23) 的第一式，分别改为

$$\tilde{\phi}(x,\bar{\lambda}) = i\sigma_2\overline{\phi(x,\lambda)}, \tag{15.11}$$

$$\tilde{\psi}(x,\bar{\lambda}) = -i\sigma_2\overline{\psi(x,\lambda)} \tag{15.12}$$

和

$$\tilde{a}(\bar{\lambda}) = \overline{a(\lambda)}. \tag{15.13}$$

§ 16 约斯特解的渐近行为和 $a(\lambda)$的表示式

我们现在来看在 λ 上半平面的 $\phi(x,\lambda)$ 当 $|\lambda| \to \infty$ 时的渐近行为．由 (13.13), 有

$$\phi_{1x} = -i\lambda\phi_1 + u\phi_2, \qquad \phi_{2x} = i\lambda\phi_2 - \bar{u}\phi_1. \tag{16.1}$$

从此二式中消去 ϕ_2, 得

$$(\phi_{1x} + i\lambda\phi_1)_x - \frac{u_x}{u}(\phi_{1x} + i\lambda\phi_1)$$

$$= i\lambda\left(\phi_{1x} + i\lambda\phi_1\right) - |u|^2\phi_1. \tag{16.2}$$

引入一个待定的函数 $\hat{\phi}(x,\lambda)$, 使

$$\phi_1(x,\lambda) = e^{(-i\lambda x + \hat{\phi})}. \tag{16.3}$$

代入 (16.2) 后，得

$$\hat{\phi}_x^2 + \hat{\phi}_{xx} - i2\lambda\hat{\phi}_x - \frac{u_x}{u}\hat{\phi}_x + |u|^2 = 0, \tag{16.4}$$

即

$$i2\lambda\mu = \mu^2 + u\left(\frac{\mu}{u}\right)_x + |u|^2, \tag{16.5}$$

式中

$$\mu = \hat{\phi}_x. \tag{16.6}$$

由 (16.1) 可见，当 $|\lambda| \to \infty$ 时，有

$$\hat{\phi} \to 0, \quad \hat{\phi}_x \to 0. \tag{16.7}$$

所以， μ 可以展开为

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu_j}{(i2\lambda)^j}. \tag{16.8}$$

(16.7) 说明， $\mu_0 = 0$. 代入 (16.5), 得

$$\mu_1 = |u|^2, \qquad \mu_2 = u\bar{u}_x \tag{16.9}$$

和

$$\mu_j = u\left(\frac{\mu_{j-1}}{u}\right)_x + \sum_{l+m=j} \mu_l\mu_m. \tag{16.10}$$

由此式又得到

$$\mu_3 = u\bar{u}_{xx} - |u|^4, \tag{16.11}$$

$$\mu_4 = u\bar{u}_{xxx} + 4|u|^2 u\bar{u}_x + |u|^2 u_x \bar{u}. \tag{16.12}$$

由此，我们可以得到相应的 $\hat{\phi}$ 的展开式

$$\hat{\phi} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\hat{\phi}_j}{(i2\lambda)^j}. \tag{16.13}$$

其中，譬如

$$\hat{\phi}_1 = \int_{-\infty}^{x} |u(y)|^2 \, dy. \tag{16.14}$$

代回到 (16.1), 当 $|\lambda| \to \infty$ 时，在复 λ 上半平面，有

$$\phi_1(x,\lambda)e^{i\lambda x} = 1 + \frac{1}{i2\lambda}\int_{-\infty}^{x} |u(y)|^2 \, dy + O(|\lambda|^{-2}) \tag{16.15}$$

和

$$\phi_2(x,\lambda)e^{i\lambda x} = \frac{1}{i2\lambda}\overline{u(x)} + O(|\lambda|^{-2}). \tag{16.16}$$

类似地，当 $|\lambda| \to \infty$ 时，在复 λ 上半平面，有

$$\psi_1(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \frac{1}{i2\lambda}u(x) + O(|\lambda|^{-2}) \tag{16.17}$$

和

$$\psi_2(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = 1 + \frac{1}{i2\lambda}\int_{x}^{\infty} |u(y)|^2 \, dy + O(|\lambda|^{-2}). \tag{16.18}$$

同理，当 $|\lambda| \to \infty$ 时，在复 λ 下半平面，有

$$\tilde{\phi}_1(x,\lambda)e^{i\lambda x} = \frac{1}{i2\lambda}u(x) + O(|\lambda|^{-2}) \tag{16.19}$$

和

$$\tilde{\phi}_2(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = 1 - \frac{1}{i2\lambda}\int_{-\infty}^{x} |u(y)|^2 \, dy + O(|\lambda|^{-2}). \tag{16.20}$$

当 $|\lambda|\to\infty$ 时，在复 λ 下半平面，有

$$\tilde{\psi}_1(x,\lambda)e^{i\lambda x}=1-\frac{1}{i2\lambda}\int_x^{\infty}|u(y)|^2\,dy+O(|\lambda|^{-2}) \tag{16.21}$$

和

$$\tilde{\psi}_2(x,\lambda)e^{i\lambda x}=\frac{1}{i2\lambda}\overline{u(x)}+O(|\lambda|^{-2}). \tag{16.22}$$

在 λ 的上半平面，而 $|\lambda|\to\infty$ 时，有

$$a(\lambda)=1+\frac{1}{i2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}|u(y)|^2\,dy+O(|\lambda|^{-2}). \tag{16.23}$$

当 λ 为实数，且 $|\lambda|\to\infty$ 时，则由 (14.26) 和上式，得

$$b(\lambda)=O(|\lambda|^{-1}). \tag{16.24}$$

由于解析函数只可能有零点．设 $a(\lambda)$ 在 λ 的上半平面有零点 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N$，则

$$a(\lambda_n)=0,\qquad \operatorname{Im}\lambda_n>0. \tag{16.25}$$

由 (14.31), $\phi(x,\lambda)$ 和 $\psi(x,\lambda)$ 成比例，考虑到 (14.16), 所以可得

$$\phi(x,\lambda_n)=b_n\psi(x,\lambda_n), \tag{16.26}$$

式中 b_n 独立于 x.

与前面 KdV 方程不同， $a(\lambda)$ 的零点不一定是简单零点，但我们只限于简单零点的情况，即假定

$$\dot{a}(\lambda_n)\neq 0,\qquad \dot{a}(\lambda_n)\equiv\frac{d}{d\lambda}a(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_n}. \tag{16.27}$$

于是 $a(\lambda)$ 的表示式，就与前面讨论 KdV 方程的情况完全一样．(4.25) 可以照搬过来，

$$a(\lambda)=\prod_{n=1}^{N}\frac{\lambda-\lambda_n}{\lambda-\bar{\lambda}_n}\exp\left\{\frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|a(\lambda')|^2}{\lambda'-\lambda}\,d\lambda'\right\}. \tag{16.28}$$

要修改的仅仅是：(4.25) 中 $a(k)$ 的零点 k_n 位于复 k 的上半平面的虚轴上，这里 $a(\lambda)$ 的零点 λ_n 位于复 λ 的上半平面，但不必在虚轴上.

由 (15.13) 可见，$\bar{\lambda}_n$ 是 $\tilde{a}(\lambda)$ 的零点. 注意 (14.33) 和 (14.16)，得

$$\tilde{\phi}(x,\bar{\lambda}_n) = -\bar{b}_n\tilde{\psi}(x,\bar{\lambda}_n), \tag{16.29}$$

式中 $\bar{b}_n$ 为比例常数. 由 (15.11) 和 (15.12)，可见

$$\tilde{b}_n = \bar{b}_n. \tag{16.30}$$

§ 17 萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程

考虑 2×2 矩阵 $F(x,\lambda)$ 和 $\tilde{F}(x,\lambda)$

$$F(x,\lambda) = \big(\phi(x,\lambda)\ \ \psi(x,\lambda)\big),$$
$$\tilde{F}(x,\lambda) = \big(\tilde{\psi}(x,\lambda)\ \ \tilde{\phi}(x,\lambda)\big), \tag{17.1}$$

我们可得

$$F(x,\lambda_n) = \psi(x,\lambda_n)(b_n\ \ 1),$$
$$\tilde{F}(x,\bar{\lambda}_m) = \tilde{\psi}(x,\bar{\lambda}_m)(1\ \ -\bar{b}_m). \tag{17.2}$$

再定义

$$\Theta(x,\lambda) = \begin{cases} a(\lambda)^{-1}F(x,\lambda), & \text{当}\,\mathrm{Im}\,\lambda > 0\,\text{时}; \\ \tilde{F}(x,\lambda), & \text{当}\,\mathrm{Im}\,\lambda < 0\,\text{时}. \end{cases} \tag{17.3}$$

$a(\lambda)^{-1}F(x,\lambda)$ 在 λ 的上半平面，除了在 λ_n 有简单极点外，处处解析. $\tilde{F}(x,\lambda)$ 在下半平面解析. $\Theta(x,\lambda)$ 在实轴处有跃度

$$a(\lambda)^{-1}F(x,\lambda) - \tilde{F}(x,\lambda)$$

$$= a(\lambda)^{-1}\left(b(\lambda)\psi(x,\lambda)\ \ \tilde{b}(\lambda)\phi(x,\lambda)\right). \tag{17.4}$$

在上和下半平面， $\Theta(x,\lambda)$ 有极限

$$\left\{\Theta(x,\lambda)E^{-1}(x,\lambda x) - I\right\} = O(|\lambda|^{-1}), \qquad 当\ |\lambda| \to \infty 时 \tag{17.5}$$

这里 $E(x,\lambda)$ 的定义见 (14.2), I 是 2×2 的单位矩阵.

应用柯西公式，得

$$\Theta(x,\lambda)E^{-1}(x,\lambda) - I = \frac{1}{i2\pi}\oint \frac{\Theta(x,\lambda')E^{-1}(x,\lambda') - I}{\lambda' - \lambda}d\lambda', \tag{17.6}$$

积分路径是：上下平面沿实轴和无穷远处的半圆弧组成的两个反时针回路，和绕每一个 λ_n 的顺时针的小圆 r_n. 也就是如图 5-1(第 14 页)，不过那里的小圆的圆心都在虚轴上，这里没有这样的限制.

由于 (17.5)，大圆弧的积分可以略去，所以上式的右端化为在各个点 λ_n 处的留数

$$\frac{1}{i2\pi}\oint_{r_n} \frac{\Theta(x,\lambda')E^{-1}(x,\lambda' x) - I}{\lambda' - \lambda}d\lambda' \tag{17.7}$$

之和 $R(x,\lambda)$ 加上连续谱部分 $J(x,\lambda)$,

$$J(x,\lambda) = \frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(b(\lambda')\phi(x,\lambda')\ \tilde{b}(\lambda')\psi(x,\lambda')\right)E^{-1}(x,\lambda')}{a(\lambda')(\lambda'-\lambda)}d\lambda'. \tag{17.8}$$

这里 r_n 表示绕 $a(\lambda)$ 的零点 λ_n 的小圆. 绕 r_n 的积分是

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\dot{a}(\lambda_n)}\frac{1}{\lambda_n - \lambda}F(x,\lambda_n)E^{-1}(x,\lambda_n) \\ &= i\frac{1}{\lambda - \lambda_n}a_n^{-1}\psi(x,\lambda_n)(b_n\ \ 1)E^{-1}(x,\lambda_n), \end{aligned} \tag{17.9}$$

式中

$$a_n \equiv i\dot{a}(\lambda_n). \tag{17.10}$$

这样，就得到

$$R(x,\lambda)=i\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}a_n^{-1}\psi(x,\lambda_n)(b_n\ 1)E^{-1}(x,\lambda_n). \tag{17.11}$$

将 (17.8) 和 (17.11) 代入 (17.4), 得到

$$\Theta(x,\lambda)=D(x,\lambda)E(x,\lambda), \tag{17.12}$$

这里

$$D(x,\lambda)\equiv I+R(x,\lambda)+J(x,\lambda). \tag{17.13}$$

若 λ 是下半平面的点，则 (17.12) 为

$$\tilde{F}(x,\lambda)=D(x,\lambda)E(x,\lambda). \tag{17.14}$$

这时，若 λ 是实的，我们就理解为 $\lambda-i0$, 即 λ 由下半平面趋于实轴. (17.14) 就是 NLS 方程的萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程.

由 (16.22), 得

$$\overline{u(x)}=\lim_{|\lambda|\to\infty}(i2\lambda)\tilde{\psi}_2(x,\lambda)e^{i\lambda x}. \tag{17.15}$$

以 (17.14) 的第二分量代入，得

$$\overline{u(x)}=2\{R_{21}(x)+J_{21}(x)\}. \tag{17.16}$$

这里

$$R_{21}(x)\equiv\lim_{|\lambda|\to\infty}i\lambda R_{21}(x,\lambda) \tag{17.17}$$

和

$$J_{21}(x)\equiv\lim_{|\lambda|\to\infty}i\lambda J_{21}(x,\lambda). \tag{17.18}$$

因此，有

$$R_{21}(x)=\sum_{n=1}^{N}c_n\psi_2(x,\lambda_n)e^{i\lambda_n x} \tag{17.19}$$

和

$$J_{21}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda)\psi_2(x,\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \tag{17.20}$$

这里

$$c_n = \frac{b_n}{a_n}. \tag{17.21}$$

由 (16.21), 得

$$\int_x^{\infty} |u(y)|^2\, dy = -\lim_{|\lambda|\to\infty}(i2\lambda)\tilde{\psi}_1(x,\lambda)e^{i\lambda x}. \tag{17.22}$$

以 (17.14) 的第一分量代入，得

$$|u(x)|^2 = 2\frac{d}{dx}\{R_{11}(x) + J_{11}(x)\}, \tag{17.23}$$

式中 $R_{11}(x)$ 和 $J_{11}(x)$ 的表示式类似于 (17.19) 和 (17.20), 只是将 ψ_2 换成 ψ_1.

§ 18　散射数据随时间的演化

在以上的讨论中，时间 t 我们往往略去不写．事实上，应当写上．例如 (14.15) 就应当写作

$$\phi(x,t,\lambda) = a(t,\lambda)\tilde{\psi}(x,t,\lambda) + b(t,\lambda)\psi(x,t,\lambda). \tag{18.1}$$

但是，此 t 仍只是一个纯参数，因为我们未能决定式中有关的量如何随 它变化．现在来看如何利用第二个拉克斯方程来决定．

约斯特解 $\phi(x,t,\lambda)$ 由于当 $x\to-\infty$ 时趋于 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}$. 它独立于 t, 所以不能满足第二个拉克斯方程．我们引入一个依赖于 t 和 λ 和函数 $h(t,\lambda)$, 使得

$$\{\partial_t - M(x,t,\lambda)\}\, h(t,\lambda)\phi(x,t,\lambda) = 0. \tag{18.2}$$

取极限 $x \to -\infty$, 得

$$\left\{\partial_t + i2\lambda^2\sigma_3\right\} h(t,\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} = 0. \tag{18.3}$$

即

$$h_t(t,\lambda) + i2\lambda^2 h(t,\lambda) = 0. \tag{18.4}$$

所以得到

$$h(t,\lambda) = e^{-i2\lambda^2 t}. \tag{18.5}$$

考虑到时间的相依，约斯特解

$$\phi(x,t,\lambda), \quad \tilde{\phi}(x,t,\lambda), \quad \tilde{\psi}(x,t,\lambda), \quad \psi(x,t,\lambda)$$

分别换成

$$\begin{aligned} &h(t,\lambda)\phi(x,t,\lambda), \qquad h^{-1}(t,\lambda)\tilde{\phi}(x,t,\lambda), \\ &h(t,\lambda)\tilde{\psi}(x,t,\lambda), \qquad h^{-1}(t,\lambda)\psi(x,t,\lambda). \end{aligned}$$

现在以 $h(t,\lambda)$ 乘 (18.1), 再以算子 $\{\partial_t - M(x,t,\lambda)\}$ 作用，取 $x \to \infty$ 的极限，这时右端成为

$$\begin{aligned} \left\{\partial_t + i2\lambda^2\sigma_3\right\} h(t,\lambda) \Bigg\{ a(t,\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \\ + b(t,\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \Bigg\} = 0, \end{aligned} \tag{18.6}$$

即

$$\partial_t\{h(t,\lambda)a(t,\lambda)\} + i2\lambda^2 h(t,\lambda)a(t,\lambda) = 0 \tag{18.7}$$

和

$$\partial_t\{h(t,\lambda)b(t,\lambda)\} - i2\lambda^2 h(t,\lambda)b(t,\lambda) = 0. \tag{18.8}$$

注意 $h(t,\lambda)$ 的表示式 (18.5), 就得到

$$a(t,\lambda) = a(0,\lambda) = a(\lambda) \tag{18.9}$$

和

$$b(t,\lambda)=b(0,\lambda)e^{i4\lambda^2 t}=b(\lambda)e^{i4\lambda^2 t}. \tag{18.10}$$

类似地， (15.26) 应写作

$$\phi(x,t,\lambda_n)=b_n(t)\psi(x,t,\lambda_n), \tag{18.11}$$

以 $h(t,\lambda_n)$ 乘上式，再以算子 $\{\partial_t-M(x,t,\lambda_n)\}$ 作用，取 $x\to\infty$ 的极限，得

$$\left\{\partial_t+i2\lambda_n^2\sigma_3\right\}h(t,\lambda_n)b_n(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda_n x}=0, \tag{18.12}$$

即

$$b_{nt}(t)-i4\lambda_n^2 b_n(t)=0. \tag{18.13}$$

所以得

$$b_n(t)=b_n(0)e^{i4\lambda_n^2 t}=b_n e^{i4\lambda_n^2 t}. \tag{18.14}$$

于是得到

$$c_n(t)=c_n(0)e^{i4\lambda_n^2 t}=c_n e^{i4\lambda_n^2 t}. \tag{18.15}$$

我们看到，只要将反散射方程中所含的量，即散射数据

$$S=\{r(\lambda),\,c_n,\,\lambda_n\} \tag{18.16}$$

换成

$$S(t)=\{r(0,\lambda)e^{i4\lambda^2 t},\,c_n(0)e^{i4\lambda_n^2 t},\,\lambda_n\}, \tag{18.17}$$

就得到含时间的结果.

§ 19 1-孤子解

作为第一个实例，现在来看无反射 $r(\lambda)=0$ 且 $N=1$ 的情况. 我们不但要求出此时 NLS 方程的解， 1- 孤子解，而且要求

出此时的约斯特解．后者将在含修正项的 NLS 方程的微扰理论中用到．这时，(17.14) 的第一列为

$$\tilde{\psi}(x,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}+i\frac{1}{\lambda-\lambda_1}c_1\psi(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x}e^{-i\lambda x}, \tag{19.1}$$

即

$$\tilde{\psi}_1(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}+i\frac{1}{\lambda-\lambda_1}c_1\psi_1(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x}e^{-i\lambda x} \tag{19.2}$$

和

$$\tilde{\psi}_2(x,\lambda)=i\frac{1}{\lambda-\lambda_1}c_1\psi_2(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x}e^{-i\lambda x}. \tag{19.3}$$

利用关系 (15.12), 在 (19.2) 中取 $\lambda=\bar{\lambda}_1$, 得

$$\overline{\psi_2(x,\lambda_1)}=e^{-i\bar{\lambda}_1 x}+i\frac{1}{\bar{\lambda}_1-\lambda_1}c_1\psi_1(x,\lambda_1)e^{i(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)x}. \tag{19.4}$$

在 (19.3) 中取 $\lambda=\bar{\lambda}_1$ 后又取复共轭，得

$$-\psi_1(x,\lambda_1)=-i\frac{1}{\lambda_1-\bar{\lambda}_1}\bar{c}_1\overline{\psi_2(x,\lambda_1)}e^{i(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)x}. \tag{19.5}$$

这两式是包含待求的量 $\psi_1(x,\lambda_1)$ 和 $\tilde{\psi}_2(x,\lambda)$ 的线代数方程组．由克莱姆法则容易得到

$$\overline{\psi_2(x,\lambda_1)}=\frac{1}{\Delta}e^{-i\bar{\lambda}_1 x} \tag{19.6}$$

和

$$\psi_1(x,\lambda_1)=\frac{1}{\Delta}i\frac{1}{\lambda_1-\bar{\lambda}_1}\bar{c}_1e^{i(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)x}e^{-i\bar{\lambda}_1 x}, \tag{19.7}$$

式中

$$\Delta=1+\frac{1}{|\bar{\lambda}_1-\lambda_1|^2}|c_1|^2e^{i2(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)x}. \tag{19.8}$$

为简化表述，引入记号

$$f_0(x,\lambda)=e^{i\lambda x} \tag{19.9}$$

和

$$f_1^2=i\frac{c_1}{\bar{\lambda}_1-\lambda_1}f_0(\lambda_1)^2. \tag{19.10}$$

由于此时

$$a(\lambda)=\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda-\bar{\lambda}_1}, \tag{19.11}$$

和 c_1 的定义 (17.21), 容易看出

$$f_1^2=-b_1 f_0(\lambda_1)^2. \tag{19.12}$$

我们得到

$$\overline{\psi_2(x,\lambda_1)}=\frac{1}{1+|f_1|^4}e^{-i\bar{\lambda}_1 x} \tag{19.13}$$

和

$$\psi_1(x,\lambda_1)=-\frac{\overline{f_1^2}}{1+|f_1|^4}e^{i\lambda_1 x}. \tag{19.14}$$

代回到 (19.1) 和 (19.2), 得

$$\tilde{\psi}_1(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}+\frac{\lambda_1-\bar{\lambda}_1}{\lambda-\lambda_1}\frac{|f_1|^4}{1+|f_1|^4}e^{-i\lambda x} \tag{19.15}$$

和

$$\tilde{\psi}_2(x,\lambda)=-\frac{\lambda_1-\bar{\lambda}_1}{\lambda-\lambda_1}\frac{f_1^2}{1+|f_1|^4}e^{-i\lambda x}. \tag{19.16}$$

于是得

$$u_1=i(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)\frac{\overline{f_1^2}}{1+|f_1|^4}. \tag{19.16}$$

代入 (17.23), 得

$$|u(x)|^2=2\frac{d}{dx}\left\{i(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)\frac{|f_1|^4}{1+|f_1|^4}\right\}. \tag{19.17}$$

利用关系 (15.12), 得

$$\psi_1(x,\lambda_1) = -\frac{\overline{f_1^2}}{1+|f_1|^4}e^{i\lambda_1 x} \tag{19.18}$$

和

$$\psi_2(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \frac{\bar{\lambda}_1 - \lambda_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1}\frac{|f_1|^4}{1+|f_1|^4}e^{i\lambda x}. \tag{19.19}$$

$\phi(x,\lambda)$ 等可由 (17.14) 的第 2 列得出. 但是, 由于我们讨论的是无反射情况, 所以很容易由以上几式得出. 这时, 有

$$\phi(x,\lambda) = a(\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda) \tag{19.20}$$

和

$$\tilde{\phi}(x,\lambda) = \tilde{a}(\lambda)\psi(x,\lambda). \tag{19.21}$$

以 (19.15) 等代入, 得

$$\phi_1(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \frac{\bar{\lambda}_1 - \lambda_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1}\frac{1}{1+|f_1|^4}e^{-i\lambda x} \tag{19.22}$$

和

$$\phi_2(x,\lambda) = \frac{\bar{\lambda}_1 - \lambda_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1}\frac{f_1^2}{1+|f_1|^4}e^{-i\lambda x}. \tag{19.23}$$

同样, 得到

$$\tilde{\phi}_1(x,\lambda) = -\frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{\lambda - \lambda_1}\frac{\overline{f_1^2}}{1+|f_1|^4}e^{i\lambda x} \tag{19.24}$$

和

$$\tilde{\phi}_2(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{\lambda - \lambda_1}\frac{1}{1+|f_1|^4}e^{i\lambda x}. \tag{19.25}$$

于是又有

$$\phi_1(x,\lambda_1) = \frac{|f_1|^4}{1+|f_1|^4}e^{-i\lambda_1 x} \tag{19.26}$$

和

$$\phi_2(x,\lambda_1) = -\frac{f_1^2}{1+|f_1|^4}e^{-i\lambda_1 x}. \tag{19.27}$$

由 $\phi(x,\lambda_1)$ 和 $\psi(x,\lambda_1)$ 的上列显式之比，得

$$b_1 = -f_1^2\, e^{-i2\lambda_1 x}. \tag{19.28}$$

它显然与 x 无关.

引入记号

$$f_1^2 = e^{i\varphi_1}e^{-\theta_1}, \tag{19.29}$$

式中

$$\varphi_1 = 2\mu_1 x + 4(\mu_1^2 - \nu_1^2)t + \phi_{10}, \tag{19.30}$$

$$\theta_1 = 2\nu_1(x - x_1 + 4\mu_1 t), \tag{19.31}$$

$$\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1, \tag{19.32}$$

这里 x_1 和 ϕ_{10} 是实常数. 可以将以上各式用 θ_1 和 φ_1 等表示出来. 例如

$$u_1 = -2\nu_1 \operatorname{sech}\theta_1 e^{-i\varphi_1}. \tag{19.33}$$

这是 NLS 方程的 1- 孤子解的已知的表式. 由 (19.28) 可得

$$b_1 = -e^{2\nu_1 x_1 + i2\phi_{10}}. \tag{19.34}$$

§ 20 无反射情况

(17.14) 是一组线代数 - 积分方程，至今也没有办法解出. 但在无反射情况， $r(\lambda)=0$, 得到了显式解. 我们看到，这时以上的公式有些要大大简化. 例如 (17.16) 化为

$$u_N = 2\sum_{n=1}^{N}\bar{c}_n\,\overline{\psi_2(\lambda_n)}\,\overline{f_0(x,\lambda_n)}. \tag{20.1}$$

在 (17.14) 中取 $\lambda=\bar{\lambda}_m$, 注意到 (17.2), 得

$$\tilde{\psi}(x,\bar{\lambda}_m)(1\ \ -\bar{b}_m)=E(x,\bar{\lambda}_m)$$

$$+i\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\bar{\lambda}_m-\lambda_n}a_n^{-1}\psi(x,\lambda_n)(b_n\ \ 1)E^{-1}(x,\lambda_n)E(x,\bar{\lambda}_m). \qquad (20.2)$$

其第一行可以写作

$$-\psi_1(\lambda_m)=-i\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\lambda_m-\bar{\lambda}_n}\bar{c}_n\overline{\psi_2(\lambda_n)}\,\overline{f_0(\lambda_n)}f_0(\lambda_m) \qquad (20.3)$$

和

$$\overline{\psi_2(\lambda_m)}=\overline{f_0(\lambda_m)}+i\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\bar{\lambda}_m-\lambda_n}c_n\psi_1(\lambda_n)f_0(\lambda_n)\overline{f_0(\lambda_m)}. \quad (20.4)$$

显然这是一个 $2N$ 个未知量， $2N$ 个方程的线代数方程组.

由 (20.2) 我们还可以求得另一组线代数方程组. 以 $(\bar{b}_m\ \ 1)^T$ 从右边乘它，得到

$$E(x,\bar{\lambda}_m)(\bar{b}_m\ \ 1)^T=-i\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\bar{\lambda}_m-\lambda_n}a_n^{-1}\psi(x,\lambda_n)$$

$$\cdot(b_n\ \ 1)E^{-1}(x,\lambda_n)E(x,\bar{\lambda}_m)(\bar{b}_m\ \ 1)^T. \quad (20.5)$$

注意因子 $(b_n\ \ 1)E^{-1}(x,\lambda_n)E(x,\bar{\lambda}_m)(\bar{b}_m\ \ 1)^T$ 不是矩阵，而是一个函数，所以上式为两个独立的线代数方程组，一含 $\psi_1(x,\lambda_n)$, 另一含 $\psi_2(x,\lambda_n)$, 各有 N 个方程，它们彼此独立. 方程 (20.5) 也可以由黎曼问题方法 (见参考文献中所引的书 [12]) 得到，它是含极点的黎曼矩阵 (即 $F(x,\lambda_n)$) 所满足的方程. 它也可以用来求孤子解. 但需要特殊的技巧才能求出显式解，这里我们不去讨论.

我们现在来求解方程组 (20.3) 和 (20.4). 先写成矩阵形式，引入矩阵记号

$$g_n=\sqrt{c_n}\,f_0(\lambda_n), \qquad (20.6)$$

$$\Psi_{jn} = \sqrt{c_n}\,\psi_j(\lambda_n), \tag{20.7}$$

$$B_{nm} = \bar{g}_n \frac{1}{\bar{p}_n + p_m} g_m, \tag{20.8}$$

式中

$$p_n = -i\lambda_n. \tag{20.9}$$

方程 (20.3) 和 (20.4) 可以分别写作

$$\Psi_{1m} = \sum_{n=1}^{N} \overline{\Psi}_{2n} B_{nm} \tag{20.10}$$

和

$$\overline{\Psi}_{2m} = \bar{g}_m - \sum_{n=1}^{N} \Psi_{1n} B_{mn}. \tag{20.11}$$

它们又可以分别写成矩阵形式，

$$\Psi_1 = \overline{\Psi}_2 B, \tag{20.12}$$

$$\overline{\Psi}_2 = \bar{g} - \Psi_1 B^T. \tag{20.13}$$

(20.1) 现在表为

$$u_N = 2\sum_{n=1}^{N} \overline{\Psi}_{2n} \bar{g}_n = 2\overline{\Psi}_2 \bar{g}^T. \tag{20.14}$$

将 (20.12) 和 (20.13) 代入，得

$$u_N = 2\bar{g}(I + BB^T)^{-1}\bar{g}^T = 2\mathrm{tr}\{(I + BB^T)^{-1}\bar{g}^T\bar{g}\}. \tag{20.15}$$

利用行列式的算法，又得

$$u_N = 2\left\{\frac{\det(I + BB^T + \bar{g}^T\bar{g})}{\det(I + BB^T)} - 1\right\}. \tag{20.16}$$

类似地，为了得到 $|u_N(x)|^2$, 利用 (17.23), 需要计算

$$2R_{11} = 2\sum_{n=1}^{N} \Psi_{1n} g_n = 2\Psi_1 g^T. \tag{20.17}$$

由 (20.12) 和 (20.13) 得

$$2R_{11} = 2\bar{g}(I + BB^T)^{-1}Bg^T = 2\mathrm{tr}\left\{(I + BB^T)^{-1}Bg^T\bar{g}\right\}. \quad (20.18)$$

如果由 (20.16) 已求得 u_N, 这式就不必算了. 但由它和 (17.23) 可直接给出 $|u_N(x)|^2$, 便于显示 N- 孤子解的模的图.

§ 21 N-孤子解的显式

利用线代数计算, (12.16) 可以写作

$$u_N = 2\,\frac{\det(I + R') - \det(I + R)}{\det(I + R)}, \quad (21.1)$$

这里

$$R = BB^T, \quad (21.2)$$

$$R' = R + \bar{g}^T\bar{g}. \quad (21.3)$$

$\det(I + R)$ 可以展开为

$$\det(I + R) = 1 + \sum_{r=1}^{N}\sum_{1\le n_1<\cdots<n_r\le N} R(n_1, n_2, \ldots, n_r), \quad (21.4)$$

式中 $R(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 是主子式, 即矩阵 R 保留第 $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 行和第 $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 列后的子矩阵的行列式. 利用线代数中的比奈 - 柯西 (Binet-Cauchy) 公式, 我们有

$$R(n_1, n_2, \cdots, n_r) = \sum_{1\le m_1<\cdots<m_r\le N} B(n_1, n_2, \cdots, n_r; m_1, m_2, \cdots, m_r)^2. \quad (21.5)$$

注意 (9.16), 由于 B_{mn} 的特殊形式, (12.8), 我们有

$B(n_1, n_2, \cdots, n_r; m_1, m_2, \cdots, m_r)$

$$= \prod_{n,m} \bar{g}_n g_m (\bar{p}_n + p_m)^{-1} \prod_{n<n',m<m'} (\bar{p}_n - \bar{p}_{n'})(p_m - p_{m'}), \quad (21.6)$$

这里

$$n, n' \in \{n_1, n_2, \cdots, n_r\}, \quad m, m' \in \{m_1, m_2, \cdots, m_r\}. \quad (21.7)$$

为了计算 $\det(I + R')$, 写下

$$R' = B'B'^T, \quad (21.8)$$

这里 B' 是一个 $N \times (N+1)$ 矩阵，它的元是

$$B'_{n0} = \bar{g}_n, \qquad n = 1, 2, \cdots, N, \quad (21.9)$$

$$B'_{nm} = B_{nm}, \qquad n, m = 1, 2, \cdots, N. \quad (21.10)$$

利用比奈 - 柯西公式，有

$$R'(n_1, n_2, \cdots, n_r) =$$

$$\sum_{0 \le m_1 < \cdots < m_r \le N} B'(n_1, n_2, \cdots, n_r; m_1, m_2, \cdots, m_r)^2. \quad (21.11)$$

右端的求和显然可以分为两部分：一部分为 $m_1 = 0$, 另一部分 $m_1 \ge 1$. 第二部分正是 $R(n_1, n_2, \cdots, n_r)$. 因此得

$$\det(I + R') - \det(I + R) =$$

$$\sum_{r=1}^{N} \sum_{1 \le n_1 < \cdots < n_r \le N} \sum_{1 \le m_2 < \cdots < m_r \le N} B'(n_1, n_2, \cdots, n_r; 0, m_2, \cdots, m_r)^2. \quad (21.12)$$

利用与导出 (21.6) 相似的手续，我们得到

$$B'(n_1, n_2, \cdots, n_r; 0, m_2, \cdots, m_r)$$

$$= \prod_{n,m} \bar{g}_n g_m (\bar{p}_n - p_m)^{-1} \prod_{n<n',m<m'} (\bar{p}_n - \bar{p}_{n'})(p_m - p_{m'}), \quad (21.13)$$

这里

$$n, n' \in \{n_1, n_2, \cdots, n_r\}, \qquad m, m' \in \{m_2, \cdots, m_r\}. \tag{21.14}$$

因此，我们得到了 $\det(I+R')$ 的显式.

N- 孤子解的最后的表式

$$u_N = 2\frac{V_N}{W_N}, \tag{21.15}$$

其中 $W_N = \det(I+R)$ 为

$$W_N = 1 + \sum_{r=1}^{N} \sum_{1\le n_1<\cdots<n_r\le N} \sum_{1\le m_1<\cdots<m_r\le N} W_N(n_1, n_2, \cdots, n_r; m_1, m_2, \cdots, m_r), \tag{21.16}$$

式中

$$W_N(n_1, n_2, \cdots, n_r; m_1, m_2, \cdots, m_r)$$

$$= (-1)^r \prod_{n,m} \bar{a}_n^{-1} \bar{f}_n^2 a_m^{-1} f_m{}^2 (\bar{\lambda}_n - \lambda_m)^{-2} \cdot \prod_{n<n', m<m'} (\bar{\lambda}_n - \bar{\lambda}_{n'})^2 (\lambda_m - \lambda_{m'})^2. \tag{21.17}$$

这里引入 f_n^2 代替 g_n^2,

$$f_n^2 = -a_n g_n^2 = -b_n f_0(\lambda_n)^2. \tag{21.18}$$

类似地， $V_N = \det(I+R') - \det(I+R)$ 又为

$$V_N = \sum_{r=1}^{N} \sum_{1\le n_1<\cdots<n_r\le N} \sum_{1\le m_2<\cdots<m_r\le N} V_N(n_1, n_2, \cdots, n_r; 0, m_2, \cdots, m_r), \tag{21.19}$$

其中

$$V_N(n_1, n_2, \cdots, n_r; 0, m_2, \cdots, m_r)$$

$$= i(-1)^r \prod_{n,m} \bar{a}_n^{-1} \bar{f}_n^2 a_m^{-1} f_m{}^2 (\bar{\lambda}_n - \lambda_m)^{-2}$$

$$\cdot \prod_{n<n',m<m'} (\bar{\lambda}_n - \bar{\lambda}_{n'})^2 (\lambda_m - \lambda_{m'})^2. \tag{21.20}$$

(21.20) 和 (21.17) 形式上相似. 但它们是完全不同的. 因为各自的指标分别满足 (21.14) 和 (21.7). 这样, 我们就得到了 NLS 方程的 N- 孤子解的显式.

通常将 (21.18) 表为

$$f_n^2 = e^{i\varphi_n} e^{-\theta_n}, \tag{21.21}$$

式中

$$\varphi_n = 2\mu_n x + 4(\mu_n^2 - \nu_n^2)t + \phi_{n0}, \tag{21.22}$$

$$\theta_n = 2\nu_n(x - x_n + 4\mu_n t), \tag{21.23}$$

$$\lambda_n = \mu_n + i\nu_n \tag{21.24}$$

和

$$b_n = -e^{2\nu_n x_n + i2\phi_{n0}}. \tag{21.25}$$

这里 x_n 和 ϕ_{n0} 是实常数.

我们来看 (20.18). 由 (17.23), 这一式应是实的. 由 (12.8), 有

$$B^H = B, \qquad \overline{B} = B^T \tag{21.26}$$

和

$$\partial_x B = \bar{g}^T g, \qquad \partial_x B^T = g^T \bar{g}. \tag{21.27}$$

所以 (21.17) 为

$$2R_{11} = 2\mathrm{tr}\{(I + BB^T)^{-1} BB_x^T\}. \tag{21.28}$$

注意矩阵的转置运算与逆运算是对易的, 和求迹运算中的因子的次序是轮换不变的, 对上式取转置, 得

$$2R_{11} = 2\mathrm{tr}\{(I + BB^T)^{-1} B_x B^T\}. \tag{21.29}$$

因而

$$2R_{11} = \operatorname{tr}\{(I+BB^T)^{-1}(B_xB^T + BB_x^T)\}$$
$$= \operatorname{tr}\{(I+BB^T)^{-1}(BB^T)_x\}. \tag{21.30}$$

由行列式算法，得到

$$2R_{11} = \frac{d}{dx}\ln\det(I+BB^T). \tag{21.31}$$

于是，(17.23) 为

$$|u(x)|^2 = \frac{d^2}{dx^2}\ln\det(I+BB^T) = \frac{d^2}{dx^2}\ln W_N, \tag{21.32}$$

式中 W_N 为 (21.16). 由 (21.17), 显然上式右端是实的.

§ 22　2-孤子解的显式

在 $N=1$ 的情形下，有

$$a_1 = i(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)^{-1} = (2\nu_1)^{-1}, \tag{22.1}$$

$$W_1 = 1 + W_1(1;1) = 1 + |f_1|^4 = 1 + e^{-2\theta_1}, \tag{22.2}$$

$$V_1 = V_1(1;0) = -2\nu_1 \bar{f}_1^2 = -i2\nu_1 e^{-i\varphi_1}e^{-\theta_1}. \tag{22.3}$$

因此得到

$$u_1 = -2\nu_1 \operatorname{sech}\theta_1 e^{-i\varphi_1}. \tag{22.4}$$

这是 NLS 方程的 1- 孤子解的已知的表式. 由 (21.27) 和 (22.2), 得

$$|u(x)|^2 = 4\nu_1^2 \operatorname{sech}^2\theta_1. \tag{22.5}$$

当 $N=2$ 时，有

$$a_1 = i\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(\lambda_1 - \bar{\lambda}_2)(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)}, \tag{22.6}$$

$$a_2 = i\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(\lambda_2 - \bar{\lambda}_1)(\lambda_2 - \bar{\lambda}_2)}. \tag{22.7}$$

这时，(21.19) 成为

$$\begin{aligned} W_2 = {} & 1 + W_2(1;1) + W_2(2;2) \\ & + W_2(1;2) + W_2(2;1) + W_2(1,2;1,2). \end{aligned} \tag{22.8}$$

也就是

$$\begin{aligned} W_2 = {} & 1 + \left|\frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right|^2 |f_1|^4 + \left|\frac{\lambda_2 - \bar{\lambda}_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right|^2 |f_2|^4 \\ & + \frac{(\bar{\lambda}_1 - \lambda_1)(\bar{\lambda}_2 - \lambda_2)}{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}\left(\bar{f}_1^2 f_2^2 + \bar{f}_2^2 f_1^2\right) + |f_1|^4 |f_2|^4 \end{aligned} \tag{22.9}$$

和

$$\begin{aligned} V_2 & = V_2(1;0) + V_2(2;0) + V_2(1,2;0,2) + V_2(1,2;0,1) \\ & = (\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)\left(\frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\bar{\lambda}_1 - \lambda_2}{\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2}|f_2|^4\right)\bar{f}_1^2 \\ & \quad + (\lambda_2 - \bar{\lambda}_2)\left(\frac{\lambda_2 - \bar{\lambda}_1}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{\bar{\lambda}_2 - \lambda_1}{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1}|f_1|^4\right)\bar{f}_2^2. \end{aligned} \tag{22.10}$$

因此得到 NLS 方程的 2- 孤子解.

$$u_2 = 2\frac{N_2}{D_2}, \tag{22.11}$$

这里

$$\begin{aligned} D_2 = {} & [(\mu_1 - \mu_2)^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2] \\ & + 2\nu_1\nu_2[\mathrm{th}\theta_1\mathrm{th}\theta_2 - \mathrm{sech}\,\theta_1\ \mathrm{sech}\,\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned} \tag{22.12}$$

和

$$N_2 = \left\{[(\mu_1 - \mu_2)^2 + \nu_1^2 - \nu_2^2] - i2\nu_2(\mu_1 - \mu_2)\mathrm{th}\theta_2\right\}\nu_1\,\mathrm{sech}\,\theta_1 e^{-i\varphi_1}$$

$$-\left\{\left[(\mu_1-\mu_2)^2-\nu_1^2+\nu_2^2\right]+i2\nu_1(\mu_1-\mu_2)\text{th}\theta_1\right\}\nu_2\,\text{sech}\,\theta_2 e^{-i\varphi_2}. \tag{22.13}$$

§ 23　N-孤子解的渐近行为

将 (19.16) 写成

$$\theta_n=\nu_n(x-x_n-v_n t), \tag{23.1}$$

这里 $v_n=-4\mu_n$. 设 ν_n 都是正的，且 μ_n 满足

$$\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_N, \tag{23.2}$$

这样就有

$$v_1>v_2>\cdots>v_N. \tag{23.3}$$

以 Ω_n 表示 $x=x_n+v_n t$ 的邻域，即 Ω_n 包含与 $x_n+v_n t$ 邻近的点. 当 $t\to+\infty$ 时，这些邻域彼此分开从左到右如

$$\Omega_N \quad \Omega_{N-1} \quad \Omega_{N-2} \quad \cdots \quad \Omega_1. \tag{23.4}$$

在邻域 Ω_j 中，

$$x-x_n-v_n t\to-\infty,\qquad 若\ \ n<j, \tag{23.5}$$

且

$$|f_n|\to+\infty. \tag{23.6}$$

类似地，有

$$x-x_m-v_m t\to+\infty,\qquad 若\ \ m>j, \tag{23.7}$$

$$|f_m|\to 0. \tag{23.8}$$

因此，当 $t\to+\infty$ 时，在邻域 Ω_j 中，有

$$W_N\approx W_N(1,2,\cdots,j-1;\,1,2,\cdots,j-1)$$

$$+W_N(1,2,\cdots,j;\,1,2,\cdots,j), \tag{23.9}$$

和

$$V_N \approx V_N(1,2,\cdots,j;\,0,1,\cdots,j-1), \tag{23.10}$$

因为这时只保留正比于 $|f_1|^4|f_2|^4\cdots|f_{j-1}|^4$ 的项.

将 (21.17) 和 (21.20) 代入，得

$$W_N \approx (-1)^{j-1}\prod_{n,n'}|f_n|^4(\bar\lambda_n-\lambda_{n'})^{-2}\prod_{n<n'}|\lambda_n-\lambda_{n'}|^4$$

$$\cdot\left\{1-|f_j|^4\prod_n|\lambda_j-\lambda_n|^4|\lambda_j-\bar\lambda_{n'}|^{-4}(\bar\lambda_j-\lambda_j)^{-2}\right\} \tag{23.11}$$

和

$$V_N \approx i(-1)^{j+1}\prod_{n,n'}|f_n|^4(\bar\lambda_n-\lambda_{n'})^{-2}\prod_{n<n'}|\lambda_n-\lambda_{n'}|^4$$

$$\cdot\bar g_j^2\prod_n(\bar\lambda_j-\bar\lambda_n)^2(\bar\lambda_j-\lambda_n)^{-2}, \tag{23.12}$$

这里

$$n,n'\in\{1,2,\cdots,j-1\}. \tag{23.13}$$

因此，当 $t\to+\infty$ 时，在邻域 Ω_j 中，N- 孤子解近似为

$$u_N \approx -i2(\bar\lambda_j-\lambda_j)\frac{\overline{f_j^{(+)2}}}{1+|f_j^{(+)}|^4}, \tag{23.14}$$

这里

$$f_j^{(+)2}=f_j^2\alpha_j\beta_j^{-1}, \tag{23.15}$$

$$\alpha_j=\prod_{n=1}^{j-1}\frac{\lambda_j-\lambda_n}{\lambda_j-\bar\lambda_n}, \tag{23.16}$$

$$\beta_j=\prod_{m=j+1}^{N}\frac{\lambda_j-\lambda_m}{\lambda_j-\bar\lambda_m}. \tag{23.17}$$

也就是，

$$u_N \approx -2\nu_j \operatorname{sech}[2\nu_j(x - x_j - v_j t - \Delta x_j^{(+)})]$$

$$\cdot \exp\{-i2[\mu_j x + 2(\mu_j^2 - \nu_j^2)t + \phi_{j0} + \delta_j^{(+)}]\}, \quad (23.18)$$

这里

$$f_j^{(+)2} = f_j^2 \exp\{i\delta_j^{(+)} + \nu_j \Delta x_j^{(+)}\}, \quad (23.19)$$

$$\delta_j^{(+)} = \frac{1}{2}(\arg \alpha_j - \arg \beta_j), \quad (23.20)$$

$$\Delta x_j^{(+)} = \frac{1}{2}\nu_j(\ln|\alpha_j| - \ln|\beta_j|). \quad (23.21)$$

类似地，当 $t \to -\infty$ 时，在邻域 Ω_j 中， N- 孤子解近似为

$$u_N \approx -i2(\bar{\lambda}_j - \lambda_j)\frac{\overline{f_j^{(-)2}}}{1 + |f_j^{(-)}|^4}, \quad (23.22)$$

这里

$$f_j^{(-)2} = f_j^2 \alpha_j^{-1} \beta_j, \quad (23.23)$$

也就是，

$$u_N \approx -2\nu_j \operatorname{sech}[2\nu_j(x - x_j - v_j t - \Delta x_j^{(-)})]$$

$$\cdot \exp\{-i2[\mu_j x + 2(\mu_j^2 - \nu_j^2)t + \phi_{j0} + \delta_j^{(-)}]\}, \quad (23.24)$$

这里

$$f_j^{(-)2} = f_j^2 \exp\{i\delta_j^{(-)} + \nu_j \Delta x_j^{(-)}\}, \quad (23.25)$$

$$\delta_j^{(-)} = -\delta_j^{(+)}, \quad (23.26)$$

$$\Delta x_j^{(-)} = -\Delta x_j^{(+)}. \quad (23.27)$$

我们已经看到，具有不同速度的孤子，若在 $t \to -\infty$ 时彼此分开，在相互作用后，在 $t \to +\infty$ 时，又成为彼此分开的孤子，形

状和速度都不变，只是发生了孤子中心的附加移动和附加相移．对于第 j 个孤子，它们分别是

$$\Delta x_j = \Delta x_j^{(+)} - \Delta x_j^{(-)} = \nu_j^{-1}(\ln|\alpha_j| - \ln|\beta_j|), \tag{23.28}$$

$$\delta_j = \delta_j^{(+)} - \delta_j^{(-)} = \arg\alpha_j - \arg\beta_j. \tag{23.29}$$

§ 24 孤子解的验证

求得了 NLS 方程的孤子解后，是否可以验证呢？对 1- 孤子解可以直接代入验算．对 N- 孤子解，这种办法是不行的．现在我们给出一种方法，它是从黎曼问题方法中借用过来的．

前面在散射数据随时间的演化的推演时讲过，考虑到时间的相依，约斯特解需作代换．引入代换

$$E(x,\lambda) \to E(x,t,\lambda) \equiv e^{-i(\lambda x + 2\lambda^2 t)\sigma_3}, \tag{24.1}$$

并以 $\psi(x,t,\lambda)$ 等表示作了代换后的约斯特解． (17.1) 和 (17.2) 将改为

$$F(x,t,\lambda) = \big(\phi(x,t,\lambda) \ \ \psi(x,t,\lambda)\big), \tag{24.2}$$

$$\tilde{F}(x,t,\lambda) = \big(\tilde{\psi}(x,t,\lambda) \ \ \tilde{\phi}(x,t,\lambda)\big) \tag{24.3}$$

$$F(x,t,\lambda_n) = \psi(x,t,\lambda_n)(b_n \ 1), \tag{24.4}$$

$$\tilde{F}(x,t,\bar{\lambda}_n) = \tilde{\psi}(x,t,\bar{\lambda}_n)(1 \ \ -\bar{b}_n), \tag{24.5}$$

这里 b_n 是一个常数，不依赖于 t. 由 (15.11) 得

$$\tilde{F}(x,t,\bar{\lambda}) = \sigma_2 \overline{F(x,t,\lambda)} \sigma_2. \tag{24.6}$$

因而，当 $\lambda = \lambda_n$ 时，有

$$\tilde{\psi}(x,t,\bar{\lambda}_n)(1 \ \ -\bar{b}_n) = \sigma_2 \overline{\psi(x,t,\lambda_n)}\,\overline{(b_n \ 1)}\sigma_2. \tag{24.7}$$

由 (24.5), 又有

$$\tilde{F}^H(x,t,\bar{\lambda}) = \sigma_2 F(x,t,\lambda)^T \sigma_2. \tag{24.8}$$

在改写无反射的反散射方程 (17.14) 时，下面用 $\tilde{F}_N(x,t,\lambda)$ 代替 $\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},\boldsymbol{\lambda})$ 后，得到

$$\tilde{F}_N(\lambda) = \left\{ I + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} a_n^{-1} \psi(\lambda_n)(b_n \ \ 1) E(\lambda_n)^{-1} \right\} E(\lambda), \tag{24.9}$$

这里 b_n 是一个常数，不再依赖于 t. 我们看到，$\tilde{F}_N(\lambda)$ 在复 λ 平面，在上半平面的 λ_n 处有一阶极点，此外处处解析. 由 (14.33), 得

$$\det \tilde{F}_N(x,t,\lambda) = \tilde{a}(\lambda). \tag{24.10}$$

我们现在来看 $\tilde{F}_N(x,\lambda)$ 的逆. 由拉克斯方程，可得

$$\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda) = \tilde{F}_N^H(x,t,\bar{\lambda}) \tag{24.11}$$

和

$$E^{-1}(x,t,\lambda) = E^H(x,t,\bar{\lambda}). \tag{24.12}$$

从 (24.9) 得

$$\tilde{F}_N^{-1}(\lambda) = E(\lambda)^{-1} \left\{ I + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}_n} \bar{a}_n^{-1} E(\bar{\lambda}_n) \cdot \begin{pmatrix} \bar{b}_n \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{\psi}(\bar{\lambda}_n)^T (i\sigma_2) \right\}. \tag{24.13}$$

由 (24.11) 和 (24.7), 得

$$\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda) = \sigma_2 \big(\phi(x,t,\lambda) \ \ \psi(x,t,\lambda)\big)^T \sigma_2. \tag{24.14}$$

所以，有

$$\tilde{F}_N^{-1}(\lambda_n) = \sigma_2 \big(\psi(x,t,\boldsymbol{\lambda}_n)(b_n \ \ 1)\big)^T \sigma_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -b_n \end{pmatrix} \psi(x,t,\lambda_n)^T(-i\sigma_2) \tag{24.15}$$

和

$$\det \tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda) = a(\lambda). \tag{24.16}$$

(24.13) 表明，$\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda)$ 在 λ 的下半平面有简单极点 $\bar{\lambda}_n$. 前面已经讲到，$\tilde{F}_N(\lambda)$ 在 λ 的上半平面有简单极点 λ_n. 但是，可以证明，$\tilde{F}_N(x,t,\lambda)\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda)$ 在这些点仍是解析的，因而在 λ 全平面是解析的，且的确恒为单位矩阵 I. 事实上，在 λ_n 处，它的表示式为

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n} \left\{ \frac{1}{\lambda-\lambda_n} a_n^{-1} \psi(x,t,\lambda_n)(b_n \ 1) \right\}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -b_n \end{pmatrix} \psi(x,t,\lambda_n)^T(-i\sigma_2). \tag{24.17}$$

它显然为零. 在 $\bar{\lambda}_n$ 处，它的表示式为

$$\lim_{\lambda\to\bar{\lambda}_n} \tilde{\psi}(x,t,\bar{\lambda}_n)(1 \ -\bar{b}_n) \left\{ \frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}_n} \bar{a}_n^{-1} \begin{pmatrix} \bar{b}_n \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$
$$\left. \cdot \tilde{\psi}(x,\bar{\lambda}_n)^T(i\sigma_2) \right\}. \tag{24.18}$$

也显然为零. 所以，它在 λ 的全平面解析，在 $|\lambda| \to \infty$ 极限下，它趋于 I. 由刘维尔 (J.Liouville) 定理，有

$$\tilde{F}_N(x,t,\lambda)\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda) = I. \tag{24.19}$$

为了证明以上得到的 $\tilde{F}_N(x,t,\lambda)$ 的确满足拉克斯方程，注意

$$\{\partial_x \tilde{F}_N(x,t,\lambda)\}\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda) \tag{24.20}$$

在 λ_n 处的表示式与 (24.17) 的区别只在于 (24.17) 中的 $\psi(x,t,\lambda_n)$ 在这里带有对 x 的微商号. 其后的因子仍然是常数因子 $(b_n \ 1)$,

所以结果仍然为零. 同理, 它在 $\bar{\lambda}_n$ 处的表示式只是将 (24.18) 中的 $\tilde{\psi}(x,t,\bar{\lambda}_n)$ 换成带对 x 微商, 所以 $\{\partial_x\tilde{F}_N(x,t,\lambda)\}\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda)$ 在 λ 全平面解析. 我们看到, 以上的结论归根到底是因子 $(b_n\ 1)^T$ 和 $(1\ -b_n)$ 分别是常数列阵和常数行阵, 它们的乘积为 0. 下一步要特别研究它在 $|\lambda|\to\infty$ 时的表示式.

将 (24.9) 和 (24.13) 简写为

$$\tilde{F}_N(x,t,\lambda)=D_N(x,t,\lambda)E(x,t,\lambda), \tag{24.21}$$

$$\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda)=E(x,t,\lambda)^{-1}D_N^{-1}(x,t,\lambda). \tag{24.22}$$

于是, 有

$$\begin{aligned}\{\partial_x\tilde{F}_N(x,t,\lambda)\}\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda)=&D_{Nx}(x,t,\lambda)D_N^{-1}(x,t,\lambda)\\&-i\lambda D_N(x,t,\lambda)\sigma_3D_N^{-1}(x,t,\lambda).\end{aligned} \tag{24.23}$$

写下 $D_N(x,t,\lambda)$ 在 $|\lambda|\to\infty$ 时的表示式,

$$D_N(x,t,\lambda)=I+\lambda^{-1}R_0+\lambda^{-2}R_1+\lambda^{-3}R_2+\cdots. \tag{24.24}$$

这里的 R_0 就是前面 (17.17) 等定义的 $-iR$. 类似地, $D_N^{-1}(x,t,\lambda)$ 在 $|\lambda|\to\infty$ 时的表示式为

$$D_N^{-1}(x,t,\lambda)=I+\lambda^{-1}R_0^H+\lambda^{-2}R_1^H+\lambda^{-3}R_2^H+\cdots. \tag{24.25}$$

于是, 有

$$\begin{aligned}&R_0+R_0^H=0,\quad R_0R_0^H+R_1+R_1^H=0,\\&R_0R_1^H+R_1R_0^H+R_2+R_2^H=0,\ldots\end{aligned} \tag{24.26}$$

这样, 我们看到 (24.23) 的右端在 $|\lambda|\to\infty$ 为

$$\{\partial_x\tilde{F}_N(x,t,\lambda)\}\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda)=-i\lambda\sigma_3-iR_0\sigma_3-i\sigma_3R_0^H+\cdots, \tag{24.27}$$

这里

$$-iR_0\sigma_3-i\sigma_3R_0^H=-i[R_0,\sigma_3]=U_N. \tag{24.28}$$

它与 (17.16) 关于 $u(x)$ 的公式是一致的.

我们看到，$\tilde{F}_{Nx}(x,t,\lambda)\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda)+i\lambda\sigma_3-U_N$ 在复 λ 全平面，包括无限远点，是正则的．由刘维尔定理，它是一常数．容易看到，此常数为 0. 这样，我们就证明了

$$\tilde{F}_{Nx}(x,t,\lambda)\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda)+i\lambda\sigma_3-U_N=0, \tag{24.29}$$

也就是

$$\partial_x\tilde{F}_{Nx}(x,t,\lambda)=\{-i\lambda\sigma_3+U_N\}\tilde{F}_N(x,t,\lambda). \tag{24.30}$$

这正是第一个拉克斯方程．这样，我们从反散射方法定出的约斯特解 $\tilde{F}_N(x,t,\lambda)$ 的确满足第一个拉克斯方程．

同样，由于因子 $(b_n\ 1)^T$ 和 $(1\ -b_n)$ 分别是常数列阵和常数行阵，乘积为 0. 类似的手续可以证明 $\tilde{F}_{Nt}(x,t,\lambda)\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda)$ 在全平面 (除无限远点外) 是正则的．由 (24.21) 和 (24.22), 有

$$\begin{aligned}\{\partial_t\tilde{F}_N(x,t,\lambda)\}\tilde{F}_N^{-1}(x,t,\lambda)=&D_{Nt}(x,t,\lambda)D_N^{-1}(x,t,\lambda)\\&-i2\lambda^2D_N(x,t,\lambda)\sigma_3D_N^{-1}(x,t,\lambda).\end{aligned} \tag{24.31}$$

它在 $|\lambda|\to\infty$ 有一个二阶极点．由 (24.23) 等可见，当 $|\lambda|\to\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}-i2\lambda^2D_N(\lambda)\sigma_3D_N^{-1}(\lambda)=&-i2\lambda^2\sigma_3-i2\lambda\{R_0\sigma_3+\sigma_3R_0^H\}\\&-i2\{R_1\sigma_3+R_0\sigma_3R_0^H+\sigma_3R_1^H\}.\end{aligned} \tag{24.32}$$

右端的前两项在 (24.27) 中已知．现在把第三项用 U_N 的函数表出．因为已经证明了第一个拉克斯方程，我们就有

$$D_{Nx}(\lambda)D_N^{-1}(\lambda)-i\lambda D_N(\lambda)\sigma_3D_N^{-1}(\lambda)=-i\lambda\sigma_3+U_N. \tag{24.33}$$

将 (24.24) 和 (24.25) 代入，并取极限 $|\lambda|\to\infty$, 具有 λ^{-1} 阶的项为

$$R_{0x}-i\{R_1\sigma_3+R_0\sigma_3R_0^H+\sigma_3R_1^H\}=0. \tag{24.34}$$

由第一个拉克斯方程，有

$$\partial_x^2 \tilde{F}_N(\lambda) = \big(L_N^2(\lambda) + L_{Nx}(\lambda)\big)\tilde{F}_N(\lambda), \tag{24.35}$$

即

$$\begin{aligned} & D_{Nxx}(\lambda) - i2\lambda D_{Nx}(\lambda)\sigma_3 - \lambda^2 D_N(\lambda) \\ & = \big(-\lambda^2 - i\lambda(\sigma_3 U_N + U_N\sigma_3) + U_N^2 + U_{Nx}\big)D_N(\lambda). \end{aligned} \tag{24.36}$$

注意 $\sigma_3 U_N + U_N\sigma_3 = 0$, 以 $\sigma_3 D_N^{-1}(\lambda)$ 从右乘上式，得

$$\begin{aligned} & D_{Nxx}(\lambda)\sigma_3 D_N^{-1}(\lambda) - i2\lambda D_{Nx}(\lambda)D_N^{-1}(\lambda) \\ & = \big(U_N^2 + U_{Nx}\big)D_N(\lambda)\sigma_3 D_N^{-1}(\lambda). \end{aligned} \tag{24.37}$$

在极限 $|\lambda| \to \infty$ 时，具有 λ^0 阶的项是

$$-i2R_{0x} = \big(U_N^2 + U_{Nx}\big)\sigma_3. \tag{24.38}$$

所以 (24.31) 的右端为

$$-i2\lambda^2\sigma_3 + 2\lambda U_N - i\big(U_N^2 + U_{Nx}\big)\sigma_3 + \cdots = M_N(\lambda) + \cdots. \tag{24.39}$$

与导出第一个拉克斯方程类似的手续，可证明 $\tilde{F}_N(x,t,\lambda)$ 满足第二个拉克斯方程. 这样，我们就证明了 $\tilde{F}_N(x,t,\lambda)$ 满足第一个和第二个拉克斯方程. 再由相容性条件就得到结论：用以上手续得到的 N- 孤子解的确满足 NLS 方程.

§ 25 NLS 方程的无穷多个守恒量

前面我们已得到 $a(t,\lambda)$ 独立于 t, 见 (18.9). 现在可以用如下手续定出 NLS 方程的无穷多个守恒律. 由 (16.3) 和 (16.14) 得

$$a(t,\lambda) = \lim_{x\to\infty} \phi_1(x,t,\lambda)e^{i\lambda x}, \tag{25.1}$$

即

$$a(t,\lambda)=\lim_{x\to\infty}e^{\hat{\phi}(x,t,\lambda)}. \tag{25.2}$$

所以有

$$\ln a(t,\lambda)=\hat{\phi}(\infty,t,\lambda). \tag{25.3}$$

由 (16.4) 得

$$\hat{\phi}(\infty,t,\lambda)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{I_j}{(i2\lambda)^j}, \tag{25.4}$$

这里

$$I_j=\int_{-\infty}^{\infty}\mu_j(x,t)\,dx. \tag{25.5}$$

这里，由于 (16.7), 有 $I_0=0$. 既然 $a(t,\lambda)$ 独立于 t, 所以无穷多个 I_j 也独立于 t. 这样，对于 NLS 方程，就得到无穷多个守恒律. 由 (16.8), 它们前几个是

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,t)|^2\,dx, \tag{25.6}$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\overline{u_x(x,t)}\,dx, \tag{25.7}$$

$$I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\left(u\bar{u}_{xx}+|u|^4\right)\,dx, \tag{25.8}$$

$$I_4=\int_{-\infty}^{\infty}\left(u\bar{u}_{xxx}+4|u|^2u\bar{u}_x+|u|^2u_x\bar{u}\right)\,dx. \tag{25.9}$$

这里头三个 I_j 有简单的物理意义： I_1 具有“粒子数”的意义，它来源于 NLS 方程 (13.1) 在 $u\to ue^{i\alpha}$ 变换下的不变性，这里 α 为一实常数； I_2 在准至一个常数因子下是“场”的总动量，它是 NLS 方程的空间平移不变性的结果； I_3 在准至一个常数因子下是“场”的哈密顿量，它是 NLS 方程的时间平移不变性的结果.

由 (16.28), 得

$$\ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{N} \left\{ \ln(\lambda - \lambda_n) - \ln(\lambda - \bar{\lambda}_n) \right\}$$

$$+ \frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|a(\lambda')|^2}{\lambda' - \lambda} \, d\lambda'. \tag{25.10}$$

当 $|\lambda| \to \infty$ 时，有

$$\ln a(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{-j} \left\{ \sum_{n=1}^{N} j^{-1} \left(\bar{\lambda}_n^j - \lambda_n^j \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|a(\lambda')|^2 \lambda'^{j-1} \, d\lambda' \right\}. \tag{25.11}$$

与 (25.3) 比较，得

$$I_j = (i2)^j \left\{ \sum_{n=1}^{N} j^{-1} \left(\bar{\lambda}_n^j - \lambda_n^j \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|a(\lambda')|^2 \lambda'^{j-1} \, d\lambda' \right\}. \tag{25.12}$$

因而，譬如 I_3 可以表为

$$I_3 = -i8 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3} \left(\bar{\lambda}_n^3 - \lambda_n^3 \right) - \frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|a(\lambda')|^2 \lambda'^2 \, d\lambda'. \tag{25.13}$$

最后，由于 $a(\lambda)^{-1}$ 在复 λ 的上半平面有 N 个一阶极点，在 λ_n 处的留数为 $\dot{a}(\lambda_n)^{-1}$, 所以

$$\frac{d}{d\lambda} \ln a(\lambda) = \frac{\dot{a}(\lambda)}{a(\lambda)} \tag{25.14}$$

在复 λ 的上半平面有 N 个一阶极点，在 λ_n 处的留数为 1. 于是，我们得到

$$N = \frac{1}{i2\pi} \oint \frac{d}{d\lambda} \ln a(\lambda) \, d\lambda, \tag{25.15}$$

积分回路由实轴和上半平面充分大的半圆弧组成. 由 (15.1) 和 (15.2) 可见, 被积函数在 λ 上半平面当 $|\lambda| \to \infty$ 时趋于 $|\lambda|^{-2}$. 所以, 上半平面的大的半圆弧的积分随半径增大而趋于 0. 因此, 积分只是沿实轴的积分, 即

$$N = \frac{1}{i2\pi} \ln a(\lambda)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi}\{\phi(+\infty) - \phi(-\infty)\}, \tag{25.16}$$

这里 $\phi(\lambda)$ 是 $a(\lambda)$ 的辐角, $a(\lambda) = |a(\lambda)|e^{i\phi(\lambda)}$.

例如, 当 $a(\lambda)^{-1}$ 只有一个位于 i 处的极点时,

$$a(\lambda) = \frac{\lambda - i}{\lambda + i}, \tag{25.17}$$

不难得到

$$\phi(\lambda) = \mathrm{arctg}\frac{2\lambda}{1 - \lambda^2}. \tag{25.18}$$

所以有

$$\phi(+\infty) - \phi(-\infty) = 2\pi. \tag{25.19}$$

这里, 由于 $\mathrm{arctg}\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}$ 的多值性, 它的值要一段一段来确定. 当 λ 在 $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ 之中从左端变到右端时, $\mathrm{arctg}\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}$ 的值都增加 $\frac{\pi}{2}$. 所以得到 (25.19), 这时 (25.16) 是正确的.

第 3 章

MKdV 方程 、SG 方程和 L-L 方程

在这一章，我们将第 2 章展开的 NLS 方程的反散射解法，扩充后来求解 MKdV 方程 、SG 方程和 L-L 方程. 这里将介绍对于实的方程在求孤子解时的特殊计算手续和求解 L-L 方程时对规范变换的运用.

§ 26 MKdV方程

MKdV 方程可以写作

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \tag{26.1}$$

这里 u 是 x 和 t 的一个实函数. 我们来讨论它在零边值条件

$$u \to 0 \qquad \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时} \tag{26.2}$$

的解. 它的拉克斯方程是

$$\partial_x F(x,t,\lambda) = L(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda), \tag{26.3}$$

和

$$\partial_t F(x,t,\lambda) = M(x,t,\lambda)F(x,t,\lambda), \tag{26.4}$$

其中

$$L(\lambda) = -i\lambda\sigma_3 + U, \tag{26.5}$$

$$M(\lambda) = -i4\lambda^3\sigma_3 + 4\lambda^2 U - i2\lambda(U^2 + U_x)\sigma_3 + 2U^3 - U_{xx}, \tag{26.6}$$

这里

$$U=\begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix}, \tag{26.7}$$

与 NLS 方程时不同，这里 u 是实的. (26.3) 和 (26.4) 的相容性条件是

$$L_t - M_x + [L, M] = 0. \tag{26.8}$$

以 (26.5) 和 (26.6) 代入，即得

$$U_t - \left(2U^3 - U_{xx}\right)_x = 0. \tag{26.9}$$

将 U 换成 (26.7), 可见此式等价于 MKdV 方程.

在用反散射方法求解 MKdV 方程时，如果我们先不管它的解是实的条件，将第一个拉克斯方程中的 L 中的 U 换成

$$U=\begin{pmatrix} 0 & u \\ -\bar{u} & 0 \end{pmatrix}, \tag{26.10}$$

就可以从 NLS 方程的反散射方法的求解中搬用不少公式. 最后加上解的实的要求，就得到 MKdV 方程的解. 这样第一个拉克斯方程与 NLS 方程的完全一样，所以一直到反散射方程，所有的公式都可以从那里搬过来. 在随时间的演化上，要用这里的第二个拉克斯方程. 重复第 2 章的手续，即将那里的 $h(t,\lambda)$ 的表示式 (18.5) 换成这里的

$$h(t,\lambda) = e^{-i4\lambda^3 t}. \tag{26.11}$$

由此又得到

$$a(t,\lambda) = a(0,\lambda), \tag{26.12}$$

$$b(t,\lambda) = b(0,\lambda)e^{i8\lambda^3 t} \tag{26.13}$$

和

$$b_n(t) = b_n(0)e^{i8\lambda_n^3 t}. \tag{26.14}$$

这里 $a(0,\lambda)$ 等都是常数. 于是, 散射数据为

$$S(t)=\{r(0,\lambda)e^{i8\lambda^3 t}, c_n(0)e^{i8\lambda_n^3 t}, \lambda_n\}. \tag{26.15}$$

这样就得到含时间的结果. 这里我们一定不可忘记最后要加上解的实的条件.

§ 27 MKdV 方程的孤子解

我们现在来看 MKdV 方程的解. 这就是, 要利用 u 的实数条件对 (26.16) 中的散射数据作适当的限制. 这包括 λ_n 在复平面上的位置, b_n 的性质, 等等. 为了以下的应用, 如 (14.5), 我们写下 $\phi(x,\lambda)$ 的积分方程,

$$\phi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}+\int_{-\infty}^{x} e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3}U(y)\phi(y,\lambda)\,dy. \tag{27.1}$$

对于 MKdV 方程, 由于 u 是实的, 从 (26.7) 可见,

$$\overline{U}=U, \tag{27.2}$$

因而

$$\overline{L(-\bar{\lambda})}=L(\lambda),\quad \overline{M(-\bar{\lambda})}=M(\lambda). \tag{27.3}$$

所以, 对约斯特函数 $\phi(x,t,\lambda)$, $\tilde{\phi}(x,t,\lambda)$, $\tilde{\psi}(x,t,\lambda)$, $\psi(x,t,\lambda)$ 有

$$\overline{\phi(x,-\bar{\lambda})}=\phi(x,\lambda), \tag{27.4}$$

等等. 因此, 又有

$$\overline{a(-\bar{\lambda})}=a(\lambda), \tag{27.5}$$

和当 λ 为实数时,

$$\overline{b(-\lambda)}=b(\lambda). \tag{27.6}$$

(27.5) 给出一个重要结果：若 λ_n 是 $a(\lambda)$ 的极点，则 $-\bar{\lambda}_n$ 也是极点．这有两种可能：它们是同一个点，或者它们是不同的两个点．对第一种情形，

$$\lambda_n = -\bar{\lambda}_n, \tag{27.7}$$

这表示 λ_n 是纯虚的，

$$\lambda_n = i\kappa_n, \quad \kappa_n > 0. \tag{27.8}$$

本节只讨论这一情况．显然，由 (27.1), 可得下列积分方程：

$$\phi(x, i\kappa_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\kappa_n x} + \int_{-\infty}^{x} e^{\kappa_n (x-y)\sigma_3} U(y)\phi(y, i\kappa_n)\, dy. \tag{27.9}$$

对它取复共轭，由于 $U(y)$ 是实数，所以不变，即

$$\phi(x, i\kappa_n) = \overline{\phi(x, i\kappa_n)}. \tag{27.10}$$

对 $\psi(x, i\kappa_n)$ 等也如此．这表示， $\phi(x, i\kappa_n)$ 等都是实的．于是，我们得到

$$b_n = \bar{b}_n, \tag{27.11}$$

即 b_n 是实数．对于 KdV 方程， (4.19) 给出 $b_n = (-1)^{(n-1)}|b_n|$. 对于 MKdV 方程，我们有

$$b_n(t) = b_n(0)e^{8\kappa_n^3 t}, \tag{27.12}$$

但不能确定 $b_n(0)$ 的正负．

由第 2 章相应的公式，可得 MKdV 方程的多孤子解，只要注意 λ_n 为纯虚 (27.8) 和 b_n 为实数 (27.11), 这时作下列简单代换：

$$(\mu_n, \ \ \nu_n) \to (0, \ \ \kappa_n). \tag{27.13}$$

这时我们有

$$f_n^2 = b_n f_0(\lambda_n)^2. \tag{27.14}$$

$$f_n^2 = \eta_n e^{-\Theta_n}, \tag{27.15}$$

其中

$$\Theta_n = 2\kappa_n(x - x_n - 4\kappa_n^2 t), \tag{27.16}$$

$$\ln|b_n| = 2\kappa_n x_n, \tag{27.17}$$

而 x_n 为一实数，这里 $\eta_n = \pm 1$ 表示 b_n 的正负号，这相当第 2 章的 (19.16) 中的 ϕ_{n0} 为 0 或 π.

对 $N=1$, 得到 MKdV 方程的 1- 孤子解，

$$u_1 = \eta_1 2\kappa_1 \mathrm{sech}\,\Theta_1. \tag{27.18}$$

对 $N=2$, 得到 MKdV 方程的 2- 孤子解，

$$u_2 = 2\frac{N_2}{D_2}, \tag{27.19}$$

式中

$$D_2 = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + 2\kappa_1\kappa_2(\mathrm{th}\,\Theta_1 \mathrm{th}\,\Theta_2 - \eta_1\eta_2 \mathrm{sech}\,\Theta_1 \mathrm{sech}\,\Theta_2) \tag{27.20}$$

和

$$N_2 = \eta_1\kappa_1(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)\mathrm{sech}\,\Theta_1 + \eta_2\kappa_2(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)\mathrm{sech}\,\Theta_2. \tag{27.21}$$

因此，利用简单的代换手续，就得到所需的结果.

§ 28　MKdV 方程的呼吸子解

再看 MKdV 方程的解是实的另一种可能： λ_n 与 $-\bar{\lambda}_n$ 是不同的点. 这时，以下标 $\breve{n}$ 来表示这后一点，

$$\lambda_{\breve{n}} = -\bar{\lambda}_n. \tag{28.1}$$

λ_n 和 $\lambda_{\breve{n}}$ 这两个点位于虚轴两边对称的位置处，即若

$$\lambda_n = \mu_n + i\nu_n, \tag{28.2}$$

则

$$\lambda_{\check{n}} = -\mu_n + i\nu_n. \tag{28.3}$$

这时，有

$$\phi(x,\lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda_n x} + \int_{-\infty}^{x} e^{-i\lambda_n (x-y)\sigma_3} U(y)\phi(y,\lambda_n)dy \tag{28.4}$$

和

$$\phi(x,\lambda_{\check{n}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda_{\check{n}} x} + \int_{-\infty}^{x} e^{-i\lambda_{\check{n}} (x-y)\sigma_3} U(y)\phi(y,\lambda_{\check{n}})dy. \tag{28.5}$$

由于 (28.1), 可见 (28.4) 和 (28.5) 是互为复共轭的. 所以有

$$\phi(x,\lambda_{\check{n}}) = \overline{\phi(x,\lambda_n)}, \tag{28.6}$$

及对 $\psi(x,\lambda_n)$ 类似的式子. 因而又有

$$b_{\check{n}} = \bar{b}_n. \tag{28.7}$$

现在来看 $\dot{a}(\lambda_n)$ 和 $\dot{a}(\lambda_{\check{n}})$ 间的关系. 若只有这样一对零点，这时

$$a(\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda+\bar{\lambda}_1}\frac{\lambda-\lambda_{\check{1}}}{\lambda+\bar{\lambda}_{\check{1}}}. \tag{28.8}$$

于是显然有

$$\dot{a}(\lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1+\bar{\lambda}_1}\frac{\lambda_1-\lambda_{\check{1}}}{\lambda_1+\bar{\lambda}_{\check{1}}} \tag{28.9}$$

和

$$\dot{a}(\lambda_{\check{1}}) = \frac{\lambda_{\check{1}}-\lambda_1}{\lambda_{\check{1}}+\bar{\lambda}_1}\frac{1}{\lambda_{\check{1}}+\bar{\lambda}_{\check{1}}}. \tag{28.10}$$

我们得到

$$\dot{a}(\lambda_{\check{1}}) = -\overline{\dot{a}(\lambda_1)}. \tag{28.11}$$

对一般的情况，我们仍有

$$\dot{a}(\lambda_{\check{n}}) = -\overline{\dot{a}(\lambda_n)}. \tag{28.12}$$

注意 a_n 和 c_n 的表示式 (17.10) 和 (17.21), 即

$$c_n = \frac{b_n}{a_n}, \quad a_n \equiv i\dot{a}(\lambda_n), \tag{28.13}$$

得

$$c_{\bar{n}} = \bar{c}_n, \quad a_{\bar{n}} = \bar{a}_n. \tag{28.14}$$

这样，在第二种情况时，我们有 (28.1)、(28.7) 和 (28.14).

现在来看 MKdV 方程的呼吸子解. 取 (28.2) 和 (28.3), 我们有

$$f_1^2 = e^{-\Theta_1} e^{i\Phi_1}, \tag{28.15}$$

这里

$$\Theta_1 = 2\nu_1[x - x_1 + 4(3\mu_1^2 - \nu_1^2)t] \tag{28.16}$$

和

$$\Phi_1 = 2\mu_1[x + 4(\mu_1^2 - 3\nu_1^2)t] + \phi_{10}, \tag{28.17}$$

及 $\Theta_{\bar{1}}$ 和 $\Phi_{\bar{1}}$ 类似的表式. 我们有

$$f_{\bar{1}}^2 = \bar{f}_1^2, \tag{28.18}$$

因为由 (28.7) 我们取了

$$x_{\bar{1}} = x_1, \quad \phi_{\bar{1}0} = -\phi_{10}. \tag{28.19}$$

用这种方法可以得到 MKdV 方程的呼吸子解 u_b. 由第 2 章的 (22.11), 作简单代换，就可得到

$$u_b = -4\nu_1 \operatorname{sech}\Theta_1 \frac{\cos\Phi_1 - \left(\frac{\nu_1}{\mu_1}\right)\sin\Phi_1 \operatorname{th}\Theta_1}{1 + \left(\frac{\nu_1}{\mu_1}\right)^2 \sin\Phi_1 \operatorname{sech}\Theta_1}. \tag{28.20}$$

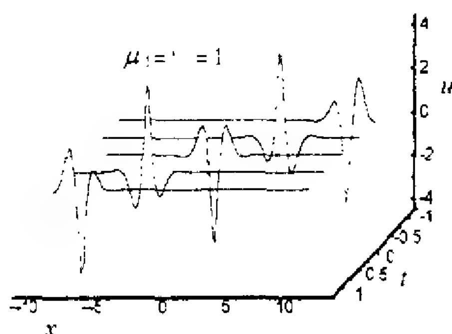


图 28-1 MKdV 方程呼吸子解

为什么称之为“呼吸子”呢？如果在中心系中画出图来，就会看到，图形随时间 t 发生一胀一缩的变化 (见图 28-1).

§ 29 MKdV 方程的特殊计算手续

由 MKdV 方程解是实数，已得到条件 (27.7)、(27.11)、(28.1) 和 (28.7). 所以可以认为恒有

$$\lambda_{\check{n}} = -\bar{\lambda}_n, \qquad p_{\check{n}} = \bar{p}_n, \tag{29.1}$$

$$b_{\check{n}} = \bar{b}_n, \quad a_{\check{n}} = \bar{a}_n, \quad c_{\check{n}} = \bar{c}_n \tag{29.2}$$

和

$$f_{\check{n}} = \bar{f}_n, \qquad g_{\check{n}} = \bar{g}_n, \tag{29.3}$$

等等. 在孤子解时，$\check{n} = n$. 在呼吸子解时，$\check{n} \neq n$. 由于有了上述条件，可以得到 MKdV 方程的一种特殊的计算手续. 其表示式相对简单，且对以下求解 SG 方程有重要的应用.

由第 2 章 (20.14), 得到

$$u_N = 2\bar{g}(I + BB^T)^{-1}\bar{g}^T, \tag{29.4}$$

其中 B 为

$$B_{nm} = \bar{g}_n \frac{1}{\bar{p}_n + p_m} g_m, \tag{29.5}$$

它不是对称的. 我们现在引入一个矩阵 $\check{B}$,

$$\check{B}_{nm} = B_{n\check{m}}, \tag{29.6}$$

所以

$$\breve{B}_{nm} = \bar{g}_n \frac{1}{\bar{p}_n + \bar{p}_m} \bar{g}_m, \tag{29.7}$$

它显然是对称的. 这里, 对于孤子指标, 二者其实是一样的. 对于呼吸子指标, 二者只是列的排列顺序作了改变. 试看一个呼吸子解的情况, 这时, 指标取 1, 2. 我们看到 p_1 和 p_2 分别为

$$p_1 = \bar{p}_2 = -i\mu_1 + \nu_1, \quad p_2 = \bar{p}_1 = i\mu_1 + \nu_1. \tag{29.8}$$

(29.5) 和 (29.6) 中的矩阵这时分别为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\nu_1} & \frac{1}{2i\mu_1 + 2\nu_1} \\ \frac{1}{-i2\mu_1 + 2\nu_1} & \frac{1}{2\nu_1} \end{pmatrix} \tag{29.9}$$

和

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{i2\mu_1 + 2\nu_1} & \frac{1}{2\nu_1} \\ \frac{1}{2\nu_1} & \frac{1}{-i2\mu_1 + 2\nu_1} \end{pmatrix}, \tag{29.10}$$

显然它们的不同只是排序. 但是后者是对称的, 这在计算上有极大的优点.

利用 (29.7), 得

$$\left(BB^T\right)_{nl} = \sum_{m=1}^{N} B_{nm}B_{lm} = \sum_{m=1}^{N} \breve{B}_{n\breve{m}}\breve{B}_{l\breve{m}}. \tag{29.11}$$

由于 $\breve{m}$ 如同 m 一样, 都是由 1 变到 N, 所以上式又可以写作

$$\sum_{\breve{m}=1}^{N} \breve{B}_{n\breve{m}}\breve{B}_{l\breve{m}} = \sum_{m=1}^{N} \breve{B}_{nm}\breve{B}_{lm}. \tag{29.12}$$

因为 $\breve{B}$ 是对称的, 更进一步, 得

$$\sum_{m=1}^{N} \breve{B}_{nm}\breve{B}_{ml} = \left(\breve{B}\breve{B}\right)_{nl}. \tag{29.13}$$

这样一来，就有

$$BB^T = \check{B}\check{B}. \tag{29.14}$$

那么，(29.4) 就改写为

$$u_N = 2\bar{g}(I + \check{B}\check{B})^{-1}\bar{g}^T = 2\mathrm{tr}\{(I + \check{B}\check{B})^{-1}\bar{g}^T\bar{g}\}. \tag{29.15}$$

由 (29.6) 可得

$$\partial_x(\check{B})_{nm} = \bar{g}_n\bar{g}_m = (\bar{g}^T\bar{g})_{nm}. \tag{29.16}$$

于是，(29.15) 就成为

$$u_N = 2\mathrm{tr}\{(I + \check{B}\check{B})^{-1}\check{B}_x\}. \tag{29.17}$$

注意

$$2(I + \check{B}\check{B})^{-1} = (I + i\check{B})^{-1} + (I - i\check{B})^{-1}, \tag{29.18}$$

因而有

$$u_N = \mathrm{tr}\{(I + i\check{B})^{-1}\check{B}_x + (I - i\check{B})^{-1}\check{B}_x\}. \tag{29.19}$$

利用第 1 章中的公式 (9.13), 从上式得到

$$u_N = -i\frac{d}{dx}\ln\det(I + i\check{B}) + i\frac{d}{dx}\ln\det(I - i\check{B}). \tag{29.20}$$

或者

$$u_N = -2\frac{d}{dx}\,\mathrm{Im}\,\ln\det(I + i\check{B}) = 2\frac{d}{dx}\,\mathrm{Im}\,\ln\det(I - i\check{B}). \tag{29.21}$$

我们注意

$$\det(I - i\check{B}) = \mathrm{Re}\,\det(I - i\check{B}) + i\,\mathrm{Im}\,\det(I - i\check{B}), \tag{29.22}$$

和

$$\ln\det(I - i\check{B}) = \ln|\det(I - i\check{B})| + i\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}\,\det(I - i\check{B})}{\mathrm{Re}\,\det(I - i\check{B})}, \tag{29.23}$$

就得到

$$u_N = 2\frac{d}{dx}\text{arctg}\frac{\text{Im}\ \det(I - i\check{B})}{\text{Re}\ \det(I - i\check{B})}. \tag{29.24}$$

当 $N = 1$ 时， $\check{B}$ 只有一个元，

$$\check{B} = \eta_1 e^{-\Theta_1}, \tag{29.25}$$

式中

$$\Theta_1 = 2p_1(x - x_1 - 4p_1^2 t). \tag{29.26}$$

这样，有

$$\text{Im}\ \det(I - i\check{B}) = -\eta_1 e^{-\Theta_1}, \tag{29.27}$$

于是，就得到

$$u_1 = -\eta_1 2\frac{d}{dx}\text{arctg}\,\Theta_1 = -\eta_1 2p_1 \text{sech}\{2p_1(x - x_1 - 4p_1^2 t)\}. \tag{29.28}$$

这就是前面已得到的 1- 孤子解.

现在来看如何利用 (29.24) 求呼吸子解. 这时注意 (29.8), 得 $\check{B}$ 为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{i2\mu_1 + 2\nu_1}\bar{g}_1^2 & \frac{1}{2\nu_1}|g_1|^2 \\ \frac{1}{2\nu_1}|g_1|^2 & \frac{1}{-i2\mu_1 + 2\nu_1}g_1^2 \end{pmatrix}. \tag{29.29}$$

所以有

$$\det(I - i\check{B}) = 1 + \frac{\mu_1^2}{4\nu_1^2(\mu_1^2 + \nu_1^2)}|g_1|^4$$

$$- i\left\{\frac{1}{i2\mu_1 + 2\nu_1}\bar{g}_1^2 + \frac{1}{-i2\mu_1 + 2\nu_1}g_1^2\right\}. \tag{29.30}$$

注意 (29.8) 和

$$a_1 = \frac{\mu_1}{2\nu_1(\mu_1 + i\nu_1)}, \tag{29.31}$$

得

$$\det(I-i\check{B})=1+|f_1|^4-i\left\{-i\frac{\nu_1}{\mu_1}\bar{f}_1^2+i\frac{\nu_1}{\mu_1}f_1^2\right\}. \tag{29.32}$$

我们看到，前两项是实的，后两项是虚的，

$$\text{Re}\ \det(I-i\check{B})=1+|f_1|^4=1+e^{-2\Theta_1} \tag{29.33}$$

和

$$\text{Im}\ \det(I-i\check{B})=-\frac{\nu_1}{\mu_1}e^{-\Theta_1}\frac{1}{i}\{e^{-i\Phi_1}-e^{i\Phi_1}\}. \tag{29.34}$$

这里 Θ_1 和 Φ_1 为 (28.16) 和 (28.17). 于是，得到

$$\frac{\text{Im}\ \det(I-i\check{B})}{\text{Re}\ \det(I-i\check{B})}=\frac{\nu_1}{\mu_1}\frac{\sin\Phi_1}{\text{ch}\Theta_1}. \tag{29.35}$$

代入 (29.24), 得到呼吸子解 (28.20).

§ 30 SG方程

现在来看 SG 方程 (正弦 - 戈登方程)

$$\theta_{xt}=\sin\theta, \tag{30.1}$$

在边值

$$\cos\theta\to 1 \qquad\qquad \text{当 } |x|\to\infty \text{ 时} \tag{30.2}$$

的求解问题. 它的拉克斯对是

$$L(\lambda)=-i\lambda\sigma_3+U, \tag{30.3}$$

$$M(\lambda)=\frac{i}{4\lambda}V, \tag{30.4}$$

这里

$$U = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix}, \qquad u = -\frac{1}{2}\theta_x, \tag{30.5}$$

$$V = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{30.6}$$

由于 SG 方程和 MKdV 方程二者的第一个拉克斯方程有相同的形式，且相应的 U 都是实的，所以这里可以照搬那里的结果. 现在来看，这时需要作的改变. 由边界条件 (30.2), 这里的 M 当 $|x| \to \infty$ 时的渐近式为

$$M(\infty, \lambda) = \frac{i}{4\lambda}\sigma_3. \tag{30.7}$$

于是，相应的 $h(t, \lambda)$ 满足

$$\{\partial_t - M(\infty, \lambda)\}h(t, \lambda) = 0, \tag{30.8}$$

即

$$h(t, \lambda) = e^{it/4\lambda}. \tag{30.9}$$

由此得到，

$$a(t, \lambda) = a(0, \lambda), \qquad b(t, \lambda) = b(0, \lambda)e^{-it/2\lambda} \tag{30.10}$$

和

$$b_n(t) = b_n(0)e^{-it/2\lambda_n}. \tag{30.11}$$

§ 31 SG 方程的孤子解和呼吸子解

由 $u = -\frac{1}{2}\theta_x$,(30.5) 和 MKdV 方程的相应的公式 (29.24), 得到

$$\theta = -4\text{arctg}\frac{\text{Im}\det(I - i\check{B})}{\text{Re}\det(I - i\check{B})}. \tag{31.1}$$

由 (29.28), 可以得到

$$\text{Im}\ \det(I - i\check{B}) = -\eta_1 e^{-\Theta_1}, \tag{31.2}$$

式中

$$\Theta_1 = 2p_1(x - x_1 - (2p_1)^{-2}t). \tag{31.3}$$

于是得

$$\theta = \eta_1 \text{arctg}\ \Theta_1. \tag{31.4}$$

这就是 SG 方程的 1- 孤子解.

现在来看呼吸子解. 由 (29.35), 有

$$\frac{\text{Im}\ \det(I - i\check{B})}{\text{Re}\ \det(I - i\check{B})} = \frac{\nu_1}{\mu_1}\frac{\sin \Phi_1}{\text{ch}\Theta_1}, \tag{31.5}$$

式中

$$\Theta_1 = 2\nu_1 \left\{x - x_1 + \frac{1}{4(\mu_1^2 + \nu_1^2)}t\right\} \tag{31.6}$$

和

$$\Phi_1 = 2\mu_1 \left\{x - \frac{1}{4(\mu_1^2 + \nu_1^2)}t\right\} + \phi_{10}, \tag{31.7}$$

这里 x_1 和 ϕ_{10} 是实常数. 由 (31.5) 和 (29.21), 得到

$$\theta_b = 4\text{arctg}\frac{\sin \Phi_1}{\text{ch}\Theta_1}. \tag{31.8}$$

这就是 SG 方程的呼吸子解.

§ 32 自旋链的 L-L 方程

描写各向同性自旋链的朗道 - 栗弗席茨 (Landau-Lifshitz) 方程 (L-L 方程) 是

$$\boldsymbol{S}_t = -\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}_{xx}, \qquad |\boldsymbol{S}| = 1. \tag{32.1}$$

这里，为方便，右端取了负号 (右端取正号相当上式 t 变号). 考虑在边界条件

$$S \to S_0 = (0,0,1) \qquad \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时} \tag{32.2}$$

的求解. L-L 方程 (32.1) 的 **拉克斯对** 是

$$L(\lambda) = -i\lambda \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{32.3}$$

和

$$M(\lambda) = -i2\lambda^2 \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \lambda(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{S}_x\cdot\boldsymbol{\sigma}), \tag{32.4}$$

这里 λ 是谱参数. 拉克斯方程是

$$\partial_x \Phi(\lambda) = L(\lambda)\Phi(\lambda) \tag{32.5}$$

和

$$\partial_t \Phi(\lambda) = M(\lambda)\Phi(\lambda). \tag{32.6}$$

今后除非必要，将略去宗量 x 和 t.

显然，当 $|x| \to \infty$ 时渐近的拉克斯方程是

$$\partial_x E(x,\lambda) = L_0(\lambda)E(x,\lambda), \tag{32.7}$$

这里 $L_0(\lambda)$ 为一般的 $L(\lambda)$ 将其中的 $\boldsymbol{S}$ 换为 $\boldsymbol{S}_0$ 而得的，

$$L_0(\lambda) = -i\lambda\sigma_3, \tag{32.8}$$

$E(x,\lambda)$ 为相应的渐近的约斯特解，

$$E(x,\lambda) = e^{-i\lambda x\sigma_3}. \tag{32.9}$$

定义约斯特解 $\Phi(x,\lambda)$

$$\Phi(x,\lambda) = e^{-i\lambda x\sigma_3}, \qquad \text{当 } x \to -\infty \text{时} \tag{32.10}$$

那么，它满足积分方程

$$\Phi(x,\lambda) = e^{-i\lambda x\sigma_3} - i\lambda \int_{-\infty}^{x} e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3}\{\boldsymbol{S}(y)\cdot\boldsymbol{\sigma} - \sigma_3\}\Phi(y,\lambda)dy. \tag{32.11}$$

写下

$$\Phi(x,\lambda) = \big(\phi(x,\lambda) \ \ \tilde{\phi}(x,\lambda)\big), \tag{32.12}$$

则可以得到

$$\phi(x,\lambda) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^{-i\lambda x} - i\lambda \int_{-\infty}^{x} e^{-i\lambda(x-y)\sigma_3}\{\boldsymbol{S}(y)\cdot\boldsymbol{\sigma} - \sigma_3\}\phi(y,\lambda)dy. \tag{32.13}$$

与第 2 章的 NLS 方程相应的积分方程 (14.4) 和 (15.1) 对比，这里积分号前有 λ, 而那里没有. 这一区别是本质的. 当 $|\lambda| \to \infty$ 时，经过分部积分，积分将有一有限项的贡献，即

$$\phi(x,\lambda) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + O(1), \tag{32.14}$$

而在 NLS 方程那里，相应的积分只有一 $|\lambda|^{-1}$ 阶的小量的贡献. 这一区别引起了一系列的麻烦. 最初，在作 $\Theta(x,\lambda)$ 的柯西积分时，事先在被积函数中引入一个附加因子 λ^{-1}, 以保证在大圆弧上的积分随半径无限增大而趋于 0. 不过，如果我们不取 λ 为谱参数来讨论正、反散射问题，而取它的倒数 $\kappa = \lambda^{-1}$ 来处理，这时，(32.3) 和 (32.4) 为

$$L(\kappa) = -i\kappa^{-1}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{32.15}$$

和

$$M(\kappa) = -i2\kappa^{-2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \kappa^{-1}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{S}_x\cdot\boldsymbol{\sigma}). \tag{32.16}$$

又有

$$E(x,\kappa) = e^{-i\kappa^{-1}x\sigma_3}. \tag{32.17}$$

从 (32.11) 和 (32.13) 可见，当 $|\kappa| \to \infty$ 时，得

$$\phi(x,\kappa) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^{-i\kappa^{-1}x} + O(|\kappa|^{-1}), \tag{32.18}$$

这里我们把参数写成了 κ. 我们看到，如果取参数 κ 来处理 L-L 方程的正、反散射问题，就会与前面处理 NLS 方程的正、反散射问题十分相似，不会有什么困难.

但是，我们这里将讨论通过规范变换利用 NLS 方程的解来求 L-L 方程的解的方法，因为这是一个相当重要的方法，并且具有十分有意义的思想.

§ 33 规范变换

我们现在来看拉克斯方程. 如第 2 章所述，考虑约斯特解的组合，

$$F(x,t,\lambda)=\big(\phi(x,t,\lambda)\ \ \psi(x,t,\lambda)\big),$$

$$\tilde{F}(x,t,\lambda)=\big(\tilde{\psi}(x,t,\lambda)\ \ \tilde{\phi}(x,t,\lambda)\big). \tag{33.1}$$

引入规范变换 $G(x,t)$, 它不依赖于 λ. 定义

$$F'(x,t,\lambda)=G(x,t)F(x,t,\lambda). \tag{33.2}$$

利用第一个拉克斯方程 (32.5), 得

$$\partial_x F'(x,t,\lambda)=L'(x,t,\lambda)F'(x,t,\lambda), \tag{33.3}$$

式中

$$L'(x,t,\lambda)=G(x,t)L(x,t,\lambda)G(x,t)^{-1}+G_x(x,t)G(x,t)^{-1}. \tag{33.4}$$

塔赫塔詹 (L.A.Takhtajan) 和萨哈诺夫发现，可以选取 $G(x,t)$ 使得 $L'(x,t,\lambda)$ 正好是 NLS 方程的拉克斯对的第一个，即

$$L'(x,\lambda)=-i\lambda\sigma_3+U(x). \tag{33.5}$$

比较 (33.4) 两端含 λ 和不含 λ 之项，得

$$\sigma_3=G(x,t)\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}G(x,t)^{-1}, \tag{33.6}$$

即

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}=G(x,t)^{-1}\sigma_3 G(x,t); \tag{33.7}$$

和

$$U(x,t)=G_x(x,t)G(x,t)^{-1}, \tag{33.8}$$

或

$$\partial_x G(x,t)=U(x,t)G(x,t). \tag{33.9}$$

利用第二个拉克斯方程 (32.6), 得

$$\partial_t F'(x,t,\lambda)=M'(x,t,\lambda)F'(x,t,\lambda), \tag{33.10}$$

式中

$$M'(x,t,\lambda)=G(x,t)M(x,t,\lambda)G(x,t)^{-1}+G_t(x,t)G(x,t)^{-1}. \tag{33.11}$$

现在来证明，以上选取的 $G(x,t)$ 正好使 $M'(x,t,\lambda)$ 是 NLS 方程的拉克斯对的第二个，即

$$M'(x,t,\lambda)=-i2\lambda^2\sigma_3+2\lambda U(x,t)-i\{U^2(x,t)+U_x(x,t)\}\sigma_3. \tag{33.12}$$

比较 (33.11) 两端不含 λ 之项，得

$$-i\{U^2(x,t)-U_x(x,t)\}\sigma_3=G_t(x,t)G(x,t)^{-1}, \tag{33.13}$$

或

$$\partial_t G(x,t)=-i\{U^2(x,t)-U_x(x,t)\}\sigma_3 G(x,t). \tag{33.14}$$

两端其余的项是

$$\begin{aligned}&-i2\lambda^2\sigma_3+2\lambda U(x,t)\\&=G(x,t)\{-i2\lambda^2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\lambda(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{S}_x\cdot\boldsymbol{\sigma})\}G(x,t)^{-1}.\end{aligned} \tag{33.15}$$

由 (33.6), 可见 λ^2 的项两端已相等，现在来看 λ 的项，即

$$(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{S}_x\cdot\boldsymbol{\sigma})=G(x,t)^{-1}2UG(x,t). \tag{33.16}$$

由 (33.7), 有

$$(\boldsymbol{S}_x\cdot\boldsymbol{\sigma}) = G^{-1}\sigma_3 G G^{-1} G_x - G^{-1} G_x G \sigma_3 G. \tag{33.17}$$

由于 σ_3 和 U 是反对易的，因而 $(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ 和 $G(x,t)^{-1}G_x(x,t)$ 也是反对易的. 所以又可以写作

$$(\boldsymbol{S}_x\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \left[(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}), G(x,t)^{-1}G_x(x,t)\right]. \tag{33.18}$$

以 $(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ 从左乘上式，再注意 (33.9), 即得证 (33.16). 因而 (33.11) 就成立. L-L 方程与 NLS 方程就可以通过规范变换联系起来，即它们是规范等价的.

我们看到，若 2×2 矩阵 $F'(x,\lambda)$ 是 NLS 方程的约斯特函数，(33.9) 和 (33.14) 说明

$$G(x,t) = F'(x,t,0). \tag{33.19}$$

这时 (33.8) 给出

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma} = F'(x,t,0)^{-1}\sigma_3 F'(x,t,0). \tag{33.20}$$

第 2 章已得

$$F'(x,t,\lambda) = D(x,t,\lambda)E(x,t,\lambda), \tag{33.21}$$

和

$$F'(x,t,\lambda)^{-1} = F'^{H}(x,t,\bar{\lambda}). \tag{33.22}$$

因此，有

$$F'(x,t,0)^{-1} = F'^{H}(x,t,0) = D(x,t,0)^{-1} = D(x,t,0)^{H}. \tag{33.23}$$

所以

$$|D(0)_{11}|^2 + |D(0)_{12}|^2 = 1, \tag{33.24}$$

$$D(0)_{11}\overline{D(0)}_{21} + D(0)_{12}\overline{D(0)}_{22} = 0. \tag{33.25}$$

(33.19) 又为

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma} = D(x,t,0)^{H}\sigma_3 D(x,t,0). \tag{33.26}$$

于是，我们看到，规范变换 $G(x,t)=D(x,t,0)$ 是酉变换，它使沿 3 轴的自旋变到 $\boldsymbol{S}$.

§ 34 L-L 方程的 1- 孤子解

于是，利用 NLS 方程的反散射解法，我们就可以得到 L-L 方程的解．当 $N=1$ 时，有

$$(\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{\sigma})=D_1(0)^H\sigma_3D_1(0). \tag{34.1}$$

由此得

$$S_3=D_1(0)_{11}\overline{D_1(0)}_{11})-D_1(0)_{21}\overline{D_1(0)}_{21}, \tag{34.2}$$

$$S_1-iS_2=2D_1(0)_{11}\overline{D_1(0)}_{21}, \tag{34.3}$$

即

$$S_1=D_1(0)_{11}\overline{D_1(0)}_{21}+\overline{D_1(0)}_{11}D_1(0)_{21}, \tag{34.4}$$

和

$$S_2=i\left(D_1(0)_{11}\overline{D_1(0)}_{21}-\overline{D_1(0)}_{11}D_1(0)_{21}\right). \tag{34.5}$$

在球极坐标中，有

$$S_3=\cos\theta,\qquad S_1-iS_2=\sin\theta e^{-i\phi}. \tag{34.6}$$

于是得

$$\cos\theta=1-2|D_1(0)_{21}|^2, \tag{34.7}$$

$$\phi=\arg\overline{D_1(0)}_{21}-\arg D_1(0)_{11}. \tag{34.8}$$

我们现在给出 L-L 方程的 1- 孤子解的表式．写下

$$f_1^2=b_1e^{i\lambda_1(x-2\lambda_1t)}=e^{i\Phi_1}e^{-\Theta_1}, \tag{34.9}$$

并且

$$\lambda_1=\mu_1+i\nu_1, \tag{34.10}$$

$$\log b_1 = i2\phi_{10} + 2\nu_1 x_1, \tag{34.11}$$

$$\Phi_1 = 2[\mu_1 x - 2(\mu_1^2 - \nu_1^2)t + \phi_{10}], \tag{34.12}$$

和

$$\Theta_1 = 2\nu_1(x - x_1 - 4\mu_1 t). \tag{34.13}$$

这里 ϕ_{10} 和 x_1 是常数.

将此式代入 (34.2) 等，就得到

$$(S_1)_3 = \cos\theta = 1 - \frac{2\nu_1^2}{|\lambda_1|^2 \mathrm{ch}^2\,\Theta_1}, \tag{34.14}$$

$$(S_1)_1 = \frac{2\nu_1^2 \mathrm{sh}\,\Theta_1 \cos\Phi_1 - 2\nu_1\mu_1 \mathrm{ch}\,\Theta_1 \sin\Phi_1}{|\lambda_1|^2 \mathrm{ch}^2\,\Theta_1}, \tag{34.15}$$

和

$$(S_1)_2 = \frac{2\nu_1\mu_1 \mathrm{ch}\,\Theta_1 \cos\Phi_1 + 2\nu_1^2 \mathrm{sh}\,\Theta_1 \sin\Phi_1}{|\lambda_1|^2 \mathrm{ch}^2\,\Theta_1}, \tag{34.16}$$

或者

$$\phi = \Phi_1 + \mathrm{arctg}\left\{\frac{\nu_1}{\mu_1}\mathrm{th}\,\Theta_1\right\}. \tag{34.17}$$

由 (34.14) 又可以得到

$$\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{\nu_1^2}{|\lambda_1|^2 \mathrm{ch}^2\,\Theta_1 - \nu_1^2}. \tag{34.18}$$

以上就是已知的自旋链的 L-L 方程的 1- 孤子解的表示式.

§ 35 多孤子解的求法

这里我们介绍 L-L 方程的多孤子解的求法. 由第 2 章，在无反射时，萨哈诺夫 - 沙巴特方程可以写作矩阵形式

$$\Psi_1 = \overline{\Psi}_2 B, \tag{35.1}$$

$$\overline{\Psi}_2 = \bar{g} - \Psi_1 B^T. \tag{35.2}$$

这时

$$D(x,t,0) = R(x,t,0), \tag{35.3}$$

所以

$$\overline{D_{21}(0)} = -i\sum_n \bar{\lambda}_n^{-1}\bar{c}_n\overline{\psi_2(\lambda_n)}\,\overline{f_0(\lambda_n)}, \tag{35.4}$$

$$D_{11}(0) = 1 - i\sum_n \lambda_n^{-1}c_n\psi_1(\lambda_n)f_0(\lambda_n), \tag{35.5}$$

采用以上的矩阵记号，得

$$\overline{D_{21}(0)} = \sum_{n=1}^{N}\overline{\Psi}_{2n}\bar{h}_n = \overline{\Psi}_2\bar{h}^T, \tag{35.6}$$

$$D_{11}(0) = 1 + \sum_{n=1}^{N} h_n\Psi_{1n} = 1 + \Psi_1 h^T, \tag{35.7}$$

这里

$$h_n = \frac{1}{p_n}g_n. \tag{35.8}$$

这样我们得到

$$\overline{D_{21}(0)} = \bar{g}(I+QQ^T)^{-1}\bar{h}^T = \frac{\det(I+QQ^T+\bar{h}^T\bar{g})}{\det(I+QQ^T)} - 1, \tag{35.9}$$

和

$$D_{11}(0) = 1 - \bar{g}(I+QQ^T)^{-1}Qh^T = \frac{\det(I+QQ^T-Qh^T\bar{g})}{\det(I+QQ^T)}. \tag{35.10}$$

这里 $\det(I+R) = \det(I+QQ^T)$ 第 2 章已经得出．结果是

$$\det(I+R) = 1 + \sum_{r=1}^{N}\sum_{1\le n_1<\cdots<n_r\le N} R(n_1,n_2,\ldots,n_r), \tag{35.11}$$

其中

$$R(n_1,n_2,\cdots,n_r)=\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r\le N}Q(n_1,n_2,\cdots,n_r;m_1,m_2,\cdots,m_r)^2,\qquad(35.12)$$

这里

$$Q(n_1,n_2,\cdots,n_r;m_1,m_2,\cdots,m_r)=\prod_{n,m}\bar f_n f_m(\bar p_n+p_m)^{-1}\cdot\prod_{n>n',m>m'}(\bar p_n-\bar p_{n'})(p_m-p_{m'}),\qquad(35.13)$$

和

$$n,n'\in\{n_1,n_2,\cdots,n_r\},\qquad m,m'\in\{m_1,m_2,\cdots,m_r\}.\qquad(35.14)$$

引入

$$R'=Q''Q'^T,\qquad(35.14)$$

这里 Q'' 和 Q' 是 $N\times(N+1)$ 矩阵，它们的元分别是

$$Q''_{n0}=\bar h_n,\quad Q'_{n0}=\bar g_n\qquad n=1,2,\cdots,N\qquad(35.15)$$

和

$$Q'_{nm}=Q''_{nm}=Q_{nm}.\qquad n,m=1,2,\cdots,N\quad(35.16)$$

利用比奈 - 柯西公式，得到 $R'(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 等于

$$\sum_{0\le m_1<\cdots<m_r\le N}\{Q''(n_1,n_2,\cdots,n_r;m_1,m_2,\cdots,m_r)\cdot Q'(n_1,n_2,\cdots,n_r;m_1,m_2,\cdots,m_r)\}.\qquad(35.17)$$

这里的求和分为两部分：一是 $m_1\ge1$, 另一是 $m_1=0$. 前着正是 $R(n_1,n_2,\cdots,n_r)$. 因此，我们得到

$$\det(I+R')-\det(I+R)=\sum_{r=1}^{N}\sum_{1\le n_1<\cdots<n_r\le N}\sum_{1\le m_2<\cdots<m_r\le N}$$

$$Q''(n_1, n_2, \cdots, n_r; 0, m_2, \cdots, m_r)$$
$$\cdot Q'(n_1, n_2, \cdots, n_r; 0, m_2, \cdots, m_r), \quad (35.18)$$

这里

$$Q''(n_1, n_2, \cdots, n_r; 0, m_2, \cdots, m_r) = \prod_{n,m} \bar{f}_n f_m \frac{p_m}{\bar{p}_n} (\bar{p}_n - p_m)^{-1}$$
$$\cdot \prod_{n>n', m>m'} (\bar{p}_n - \bar{p}_{n'})(p_m - p_{m'}) \quad (35.19)$$

和

$$Q'(n_1, n_2, \cdots, n_r; 0, m_2, \cdots, m_r)$$
$$= \prod_{n,m} \bar{f}_n f_m (\bar{p}_n - p_m)^{-1} \prod_{n>n', m>m'} (\bar{p}_n - \bar{p}_{n'})(p_m - p_{m'}), \quad (35.20)$$

式中

$$n, n' \in \{n_1, n_2, \cdots, n_r\}, \quad m, m' \in \{m_2, \cdots, m_r\}. \quad (35.21)$$

$\det(I + \check{R}) = \det(I + QQ^T - Qh^T\bar{g})$ 的展开式如 (35.10), 注意

$$S_{nm} = Q_{nm} - \bar{g}_n h_m = -\bar{g}_n \frac{1}{\bar{p}_n + p_m} \frac{\bar{p}_m}{p_m} g_m, \quad (35.22)$$

得到

$$S(n_1, n_2, \cdots, n_r; m_1, m_2, \cdots, m_r)$$
$$= (-1)^r \prod_{n,m} \bar{f}_n f_m \frac{p_m}{\bar{p}_n} (\bar{p}_n + p_m)^{-1} \prod_{n>n', m>m'} (\bar{p}_n - \bar{p}_{n'})(p_m - p_{m'}),$$
$$(35.23)$$

式中指标满足 (35.13).

可以写作

$$f_n^2 = a_n^{-1} e^{-\Theta_n} e^{i\Phi_n}, \quad (35.24)$$

这里

$$\Theta_n(x, t) = 2\nu_n\{x - x_n + 4\mu_n t\}, \quad (35.25)$$

$$\Phi_n(x,t) = 2\{\mu_n x - 2(\mu_n^2 - \nu_n^2)t\} + \phi_{n0}, \tag{35.26}$$

式中 x_n 和 ϕ_{n0} 是实常数,

$$\lambda_n = \mu_n + i\nu_n. \tag{35.27}$$

这样我们就对任意的 N, 求出了 $\overline{D_{21}(0)}$ 和 $D_{11}(0)$. 于是 S 就可以得出.

第 4 章

哈 密 顿 系 统

本章将以哈密顿系统的观点来研究 NLS 方程的变换：

$\big(u(x),\ \overline{u(x)}\big) \to \big(a(\lambda),\ \tilde{a}(\lambda),\ b(\lambda),\ \tilde{b}(\lambda),\ \lambda_n, \bar{\lambda}_n\ b_n,\ \tilde{b}_n\big).$

§ 36 马尔钦柯方程

NLS 方程是

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, \tag{36.1}$$

这里 u 是复的. 它在零边值条件

$$u \to 0 \qquad\qquad \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时} \tag{36.2}$$

下的求解，在第 2 章已详细介绍了由萨哈诺夫和沙巴特发展的反散射变换方法，并且在利用了比奈 - 柯西公式后从无反射的反散射方程得到了 NLS 方程的多孤子解的显式. 这里，我们用自然的方式讲述哈密顿方法. 虽然这比较繁琐，但我们将尽力做得简捷和系统. 至于推演哈密顿方法的 r- 矩阵方法，则只简单介绍它的最后结果.

在第 2 章中求解 NLS 方程时，我们没有讲马尔钦柯方程，因为，就求解看，如 KdV 方程时已看到的，它与萨哈诺夫 - 沙巴特方程是完全等价的. 但是，在建立哈密顿方法时，它有特别的作用，例如导出约斯特解的完备性等等.

由于 $\psi(x,\lambda)$ 在 λ 的上半平面解析，定义

$$K_{\cdot 2}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\psi(x,\lambda)-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}\right\}e^{-i\lambda y}d\lambda, \tag{36.3}$$

当 $y<x$ 时，上式右端可以加上沿上半平面大的半圆弧的积分，因为当半径趋于无穷时其贡献为 0. 这样，右端就成为回路积分，又因被积函数在上半平面是解析的，所以为 0,

$$K_{\cdot 2}(x,y)=0. \qquad \text{当 } y<x \text{ 时} \tag{36.4}$$

于是，(36.3) 的逆变换可以写作

$$\psi(x,\lambda)=E_{\cdot 2}(x,\lambda)+\int_x^{\infty}K_{\cdot 2}(x,y)e^{i\lambda y}dy, \tag{36.5}$$

这里

$$E_{\cdot 2}(x,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}. \tag{36.6}$$

同理，有

$$\tilde{\psi}(x,\lambda)=E_{\cdot 1}(x,\lambda)+\int_x^{\infty}K_{\cdot 1}(x,y)e^{-i\lambda y}dy, \tag{36.7}$$

这里

$$E_{\cdot 1}(x,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}. \tag{36.8}$$

(36.5) 和 (36.7) 可以合并，写作

$$\Psi(x,\lambda)=e^{-i\lambda x\sigma_3}+\int_x^{\infty}K(x,y)e^{-i\lambda y\sigma_3}dy. \tag{36.9}$$

由 (14.20) 容易得到

$$\sigma_2\overline{K(x,y)}\sigma_2=K(x,y), \tag{36.10}$$

即

$$K_{22}(x,y)=\overline{K_{11}(x,y)},\qquad K_{12}(x,y)=-\overline{K_{21}(x,y)}. \tag{36.11}$$

当 λ 为实数时，可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\,d\lambda=2\pi\delta(x) \tag{36.12}$$

和当 $x<0$ 时，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-\lambda'}e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\begin{cases} e^{-i\lambda' x}, & \text{当 } \operatorname{Im}\lambda'>0\text{时},\\ -e^{-i\lambda' x}, & \text{当 } \operatorname{Im}\lambda'<0\text{时}.\end{cases} \tag{36.13}$$

设 λ 从下半平面趋于实轴，即为 $\lambda-i0$, 萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程 (17.14) 的第 1 列为

$$\tilde{\psi}(x,\lambda)=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+R_{\cdot 1}(x,\lambda)+J_{\cdot 1}(x,\lambda)\right\}e^{-i\lambda x}. \tag{36.14}$$

乘以 $(2\pi)^{-1}e^{i\lambda y}$, 这里 $y>x$, 对 λ 从 $-\infty$ 到 ∞ 积分，得

$$K_{\cdot 1}(x,y)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}f(x+y)+\int_{x}^{\infty}K_{\cdot 2}(x,z)f(z+y)\,dz=0. \tag{36.15}$$

式中

$$f(x)=\sum_{n=1}^{N}c_n e^{i\lambda_n x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda. \tag{36.16}$$

同理，从 (17.14) 的第 2 列，或利用 (36.11), 得到

$$K_{\cdot 2}(x,y)-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\overline{f(x+y)}-\int_{x}^{\infty}K_{\cdot 1}(x,z)\overline{f(z+y)}\,dz=0. \tag{36.17}$$

二式合并，得

$$K(x,y)+F(x+y)+\int_x^\infty K(x,z)F(z+y)\,dz=0,\quad y>x \tag{36.18}$$

式中

$$F(x)=\begin{pmatrix} 0 & -\overline{f(x)} \\ f(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{36.19}$$

这样，我们就从萨哈诺夫 - 沙巴特方程导出了马尔钦柯方程. 反之，也可以就从马尔钦柯方程导出萨哈诺夫 - 沙巴特方程. 两者的等价，也可以如第 1 章讨论 KdV 方程时那样直接加以证明.

当 $|\lambda|\to\infty$ 时，由 (36.7), 得

$$\tilde{\psi}(x,\lambda)=E_{\cdot 1}(x,\lambda)+\frac{1}{i\lambda}K_{\cdot 1}(x,x)e^{-i\lambda x}+O(|\lambda|^{-2}). \tag{36.20}$$

与 (17.15) 比较，得

$$\overline{u(x)}=2K_{21}(x,x). \tag{36.21}$$

这样，将马尔钦柯方程在无反射时求解后，代入 (36.21), 同样得到 NLS 方程的孤子解.

§ 37 约斯特解的完备性

我们常常遇到一个方程的某些解是否完备的问题. 这是一个线性方程范围内的概念. 如果一个线性方程，它的已经找到的有某些解，或满足一定条件而存在的某些解，我们说它们是完备的，这是说，该方程的任何满足同样条件的解可以表为它们的线性组合. 对一个非线性方程，由于解的线性组合不再是解，所以以上解的完备性的概念难以扩充到非线性方程. 虽然直观说，下述说法似乎有意义：解的完备性就是说，除这些解外，方程不再

有别的解. 但是对非线性方程，我们很难作出一个严格的数学表述，并给出一个有效的判据.

对于拉克斯方程，因为它是线性方程，所以它的某些解是否完备就有确切意义. 现在来证明它的约斯特解是完备的.

用狄喇克 (P.A.M.Dirac) 记号定义约斯特解的内积如下：

$$\langle\phi(\lambda')|\phi(\lambda)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\lambda')^A \phi(x,\lambda)\, dx. \tag{37.1}$$

这里，伴随态 $\phi(x,\lambda)^A$ 为如下行阵

$$\phi(x,\lambda)^A = \psi(x,\lambda)^T \sigma_1. \tag{37.2}$$

由第一个拉克斯方程 (13.12) 可得朗斯基行列式 (14.35) 的如下性质：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx} W\left[\phi(x,\lambda), \psi(x,\lambda')\right] \\ &= -i(\lambda-\lambda')\left\{\phi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda')+\phi_2(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda')\right\}.\end{aligned} \tag{37.3}$$

于是， (37.1) 成为

$$\langle\phi(\lambda')|\phi(\lambda)\rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{-i(\lambda-\lambda')} W\left[\phi(x,\lambda'), \psi(x,\lambda)\right]\Big|_{-L}^{L}. \tag{37.4}$$

其上限部分为两项

$$a(\lambda) W\left[\tilde{\psi}(L,\lambda), \psi(L,\lambda')\right] + b(\lambda) W\left[\psi(L,\lambda), \psi(L,\lambda')\right], \tag{37.5}$$

其下限部分也为两项

$$-\tilde{b}(\lambda') W\left[\phi(-L,\lambda), \phi(-L,\lambda')\right] + a(\lambda') W\left[\phi(-L,\lambda), \tilde{\phi}(-L,\lambda')\right]. \tag{37.6}$$

这里 λ 和 λ' 理解为从上半平面趋于实轴，极限应理解为主值.

$$\lim_{L\to\infty} P \frac{1}{i(\lambda-\lambda')} e^{i(\lambda-\lambda')L} = 2\pi\delta(\lambda-\lambda'). \tag{37.7}$$

(37.5) 的第二项的贡献为 0,(37.6) 的第一项的贡献也为 0, 所以

$$\langle \phi(\lambda')|\phi(\lambda)\rangle = 2\pi a(\lambda)\delta(\lambda-\lambda'). \tag{37.8}$$

由于 (37.2) 可以解析地延拓到 λ 的上半平面，将 (37.2) 对 λ 微商，再取 $\lambda=\lambda'=\lambda_n$, 得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}W\left[\phi(x,\lambda_n),\dot{\psi}(x,\lambda_n)\right]\\&\qquad= i\left\{\phi_1(x,\lambda_n)\psi_2(x,\lambda_n)+\phi_2(x,\lambda_n)\psi_1(x,\lambda_n)\right\}.\end{aligned} \tag{37.9}$$

因而，

$$i\langle \phi(\lambda_n)|\phi(\lambda_n)\rangle = \lim_{L\to\infty} W\left[\phi(x,\lambda_n),\dot{\psi}(x,\lambda_n)\right]\Big|_{-L}^{L}. \tag{37.10}$$

这一式的计算，通常是在 $u(x)$ 具有紧致台集假定下作出的 (见附录 A). 这时展开式

$$\phi(x,\lambda)=a(\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda)+b(\lambda)\psi(x,\lambda), \tag{37.11}$$

$$\tilde{\phi}(x,\lambda)=-\tilde{b}(\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda)+\tilde{a}(\lambda)\psi(x,\lambda), \tag{37.12}$$

$$\tilde{\psi}(x,\lambda)=\tilde{a}(\lambda)\phi(x,\lambda)-b(\lambda)\tilde{\phi}(x,\lambda) \tag{37.13}$$

和

$$\psi(x,\lambda)=\tilde{b}(\lambda)\phi(x,\lambda)+a(\lambda)\tilde{\phi}(x,\lambda) \tag{37.14}$$

除实轴之外，还在某一区域成立，且 $b(\lambda_n)=b_n$, $\tilde{b}(\bar{\lambda}_n)=\tilde{b}_n$. 在这一理解下， (37.10) 的上限部分为

$$b_n\frac{d}{d\lambda}W\left[\psi(L,\lambda_n),\psi(L,\lambda)\right]\Big|_{\lambda=\lambda_n}. \tag{37.15}$$

由 (37.7) 可见，上式在 $\lambda\to\lambda_n$ 时，其指数项因子为 $e^{i2\lambda_n L}$, 但这里 $2\lambda_n\neq 0$, 因而上式为 0 . (37.6) 的下限部分为

$$\frac{d}{d\lambda}\Big\{a(\lambda)W\left[\phi(-L,\lambda_n),\tilde{\phi}(-L,\lambda)\right]$$

$$+\tilde{b}(\lambda)W\big[\phi(-L,\lambda_n),\phi(-L,\lambda)\big]\Big\}\Big|_{\lambda=\lambda_n}. \tag{37.16}$$

此式的第二项，由于与 (37.15) 同样的道理，为 0. 此式的第一项，只有对 λ 的微商作用于 $a(\lambda)$ 再取 $\lambda=\lambda_n$ 时才不为 0. 这时的结果是 $\dot{a}(\lambda_n)$. 因此得到

$$\langle\phi(\lambda_m)|\phi(\lambda_n)\rangle = i\dot{a}(\lambda_n)\delta_{mn}. \tag{37.17}$$

同理，得

$$\langle\tilde{\phi}(\lambda')|\tilde{\phi}(\lambda)\rangle = 2\pi\tilde{a}(\lambda)\delta(\lambda-\lambda') \tag{37.18}$$

和

$$\langle\tilde{\phi}(\bar{\lambda}_m)|\tilde{\phi}(\bar{\lambda}_n)\rangle = -i\dot{\tilde{a}}(\bar{\lambda}_n)\delta_{mn}. \tag{37.19}$$

其余的内积都为 0. 这就是正交关系.

以上定义的狄喇克右矢，如 $|\phi(\lambda)\rangle$, 是针对约斯特解 $\phi(x,\lambda)$ 的. 而其伴随的狄喇克左矢，如 $\langle\phi(\lambda)|$, 实际上是涉及约斯特解 $\psi(x,\lambda)$ 的. 我们同样可以定义另一类狄喇克右矢，如 $|\psi(\lambda)\rangle$, 和其伴随的狄喇克左矢，如 $\langle\psi(\lambda)|$. 但是，这里只讨论前一类狄喇克右矢.

如果以上的前一类狄喇克右矢是完备的，这就是说，拉克斯方程的任意一个解 $f(x)$, 则它相应的狄喇克右矢 $|f\rangle$ 可以用以上的狄喇克右矢来展开，

$$|f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{f(\lambda)|\phi(\lambda)\rangle + \tilde{f}(\lambda)|\tilde{\phi}(\lambda)\rangle\Big\}d\lambda$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\Big\{f_n|\phi(\lambda_n)\rangle + \tilde{f}_n|\tilde{\phi}(\bar{\lambda}_n)\rangle\Big\}. \tag{37.20}$$

利用以上的正交关系，立即得到系数是

$$f(\lambda) = \frac{1}{a(\lambda)}\langle\phi(\lambda)|f\rangle, \qquad \tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\tilde{a}(\lambda)}\langle\tilde{\phi}(\lambda)|f\rangle \tag{37.21}$$

和

$$f_n = -i\frac{1}{\dot{a}(\lambda_n)}\langle\phi(\lambda_n)|f\rangle, \qquad \tilde{f}_n = i\frac{1}{\dot{\tilde{a}}(\bar{\lambda}_n)}\langle\tilde{\phi}(\bar{\lambda}_n)|f\rangle. \tag{37.22}$$

把这几式代回 (37.20), 即得

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{|\phi(\lambda)\rangle\frac{1}{a(\lambda)}\langle\phi(\lambda)| + |\tilde{\phi}(\lambda)\rangle\frac{1}{\tilde{a}(\lambda)}\langle\tilde{\phi}(\lambda)\right\}d\lambda$$

$$-i\sum_{n=1}^{N}\left\{|\phi(\lambda_n)\rangle\frac{1}{\dot{a}(\lambda_n)}\langle\phi(\lambda_n)| - |\tilde{\phi}(\bar{\lambda}_n)\rangle\frac{1}{\dot{\tilde{a}}(\bar{\lambda}_n)}\langle\tilde{\phi}(\bar{\lambda}_n)|\right\}. \tag{37.23}$$

这就是单位算符的分解式，即完备关系.

它又可写作：左端为 $\delta(x-y)$, 右端为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\phi(x,\lambda)\frac{1}{a(\lambda)}\phi(y,\lambda)^A + \tilde{\phi}(x,\lambda)\frac{1}{\tilde{a}(\lambda)}\tilde{\phi}(y,\lambda)^A\right\}d\lambda$$

$$-i\sum_{n=1}^{N}\left\{\phi(x,\lambda_n)\frac{1}{\dot{a}(\lambda_n)}\phi(y,\lambda_n)^A - \tilde{\phi}(x,\bar{\lambda}_n)\frac{1}{\dot{\tilde{a}}(\bar{\lambda}_n)}\tilde{\phi}(y,\bar{\lambda}_n)^A\right\}. \tag{37.24}$$

为了证明它，右端要用独立的方式算出.

利用 (37.13) 和 (37.14), 将上式右端再改写为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\tilde{\psi}(x,\lambda)\psi(y,\lambda)^T + \psi(x,\lambda)\tilde{\psi}(y,\lambda)^T\right\}\sigma_1 d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{r(\lambda)\psi(x,\lambda)\psi(y,\lambda)^T - \tilde{r}(\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda)\tilde{\psi}(y,\lambda)^T\right\}\sigma_1 d\lambda$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\left\{c_n\psi(x,\lambda_n)\psi(y,\lambda_n)^T + \tilde{c}_n\tilde{\psi}(x,\bar{\lambda}_n)\tilde{\psi}(y,\bar{\lambda}_n)^T\right\}\sigma_1. \tag{37.25}$$

不难看出，下式成立：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{E_{\cdot 1}(x,\lambda)E_{\cdot 2}(y,\lambda)^T + E_{\cdot 2}(x,\lambda)E_{\cdot 1}(y,\lambda)^T\right\}\sigma_1 d\lambda$$

$$= 2\pi\delta(x-y). \tag{37.26}$$

注意此式，以积分表示式 (36.5) 和 (36.7) 代入 (37.25)，即可看到 (37.25) 的第一项积分为

$$\delta(x-y) + K(x,y)\theta(y-x) + K(y,x)^T\theta(x-y)$$
$$+ \int_x^\infty \int_y^\infty K(x,s)K(y,t)^T\delta(s-t)dt\,ds, \tag{37.27}$$

这里

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases} \tag{37.28}$$

(37.25) 其余的项可以化为

$$F(x+y) + \int_x^\infty K(x,s)F(s+y)ds + \int_y^\infty F(x+t)K(y,t)^T dt$$
$$+ \int_x^\infty \int_y^\infty K(x,s)F(s+t)K(y,t)^T dt\,ds. \tag{37.29}$$

我们现在来看 $y > x$ 的情况．这时，(37.27) 的第三项为 0，第二项为 $K(x,y)$．于是，它与 (37.29) 的第一、第二项由于马尔钦柯方程而消去．(37.27) 的最后一项与 (37.29) 的第三、第四项由于马尔钦柯方程而消去．这样，只剩下 (37.27) 的第一项 $\delta(x-y)$．另一种情况，$y < x$，只要注意

$$F(x)^T = \sigma_1 F(x)\sigma_1, \tag{37.30}$$

就可以同样证明．这样一来，(37.24) 的右端已独立算出，利用马尔钦柯方程抵消后，只剩下一项 $\delta(x-y)$．于是，不论 y 从 x 的何方趋于 x，(37.24) 的右端算出来都是 $\delta(x-y)$．这就证明了所选的约斯特解是完备的．

这里应当注意，在证明中我们是依据马尔钦柯方程，那时假定了只有简单极点，所以以上的证明只是说，在只有简单极点的

假定下，以上所选的约斯特解是完备的. 人们可以明白，如果有一个对应于二阶极点的约斯特解，它自然不能用仅对应于一阶极点的约斯特解来展开.

§ 38 对 $u(x)$ 的变分

NLS 方程的哈密顿量是

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \{\bar{u}_x u_x - \bar{u}^2 u^2)\, dx. \tag{38.1}$$

这时，正则变量是 $u(x)$ 和 $\pi(x) = \overline{iu(x)}$, 经典的泊松括号为

$$\{u(x),\ \overline{iu(y)}\} = \delta(x-y). \tag{38.2}$$

一般的泊松括号的定义是

$$\{S,T\} = i\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta S}{\delta u(x)}\frac{\delta T}{\delta \overline{u(x)}} - \frac{\delta S}{\delta \overline{u(x)}}\frac{\delta T}{\delta u(x)}\right) dx. \tag{38.3}$$

由第一个拉克斯方程 (13.12), 得

$$\partial_x \delta \Phi(x,\lambda) = L(x,\lambda)\delta\Phi(x,\lambda) + \delta L(x,\lambda)\Phi(x,\lambda). \tag{38.4}$$

显然，解得

$$\delta\Phi(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{x} dz \Phi(x,\lambda)\Phi^{-1}(z,\lambda)\delta L(z,\lambda)\Phi(z,\lambda). \tag{38.5}$$

此式可以验证. 将它对 x 取微商，作用于上限时给出 (38.4) 右端的第二项. 作用于积分号内的 $\Phi(x,\lambda)$ 给出一个因子 $L(x,\lambda)$, 它可以提到积分号外，这就给出 (38.4) 右端的第一项. 同理得

$$\delta\Psi(x,\lambda) = -\int_{x}^{\infty} \Psi(x,\lambda)\Psi^{-1}(z,\lambda)\delta L(z,\lambda)\Psi(z,\lambda)dz. \tag{38.6}$$

注意

$$\frac{\delta L(z,\lambda)}{\delta u(x)} = \sigma_+ \delta(x-z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-z) \tag{38.7}$$

和

$$\frac{\delta L(z,\lambda)}{\delta \overline{u(x)}} = -\sigma_- \delta(x-z) = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-z). \tag{38.8}$$

由 (38.4) 得，当 $x > z$ 时，

$$\frac{\delta \Phi(x,\lambda)}{\delta u(z)} = \Phi(x,\lambda) \Phi^{-1}(z,\lambda) \sigma_+ \Phi(z,\lambda) \tag{38.9}$$

和

$$\frac{\delta \Phi(x,\lambda)}{\delta \overline{u(z)}} = -\Phi(x,\lambda) \Phi^{-1}(z,\lambda) \sigma_- \Phi(z,\lambda). \tag{38.10}$$

所以，由 (38.6) 得，当 $x < z$ 时，

$$\frac{\delta \Psi(x,\lambda)}{\delta u(z)} = -\Psi(x,\lambda) \Psi^{-1}(z,\lambda) \sigma_+ \Psi(z,\lambda) \tag{38.11}$$

和

$$\frac{\delta \Psi(x,\lambda)}{\delta \overline{u(z)}} = \Psi(x,\lambda) \Psi^{-1}(z,\lambda) \sigma_- \Psi(z,\lambda). \tag{38.12}$$

利用

$$\delta \Psi^{-1}(x,\lambda) = -\Psi^{-1}(x,\lambda) \delta \Psi(x,\lambda) \Psi^{-1}(x,\lambda), \tag{38.13}$$

从 (38.11) 和 (38.12) 得，当 $x < z$ 时，

$$\frac{\delta \Psi^{-1}(x,\lambda)}{\delta u(z)} = \Psi^{-1}(z,\lambda) \sigma_+ \Psi(z,\lambda) \Psi^{-1}(x,\lambda) \tag{38.14}$$

和

$$\frac{\delta \Psi^{-1}(x,\lambda)}{\delta u(z)} = -\Psi^{-1}(z,\lambda)\sigma_- \Psi(z,\lambda)\Psi^{-1}(x,\lambda). \tag{38.15}$$

因为 $T(\lambda) = \Psi^{-1}(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)$, 所以

$$\delta T(\lambda) = \delta\Psi^{-1}(x,\lambda)\Phi(x,\lambda) + \Psi^{-1}(x,\lambda)\delta\Phi(x,\lambda). \tag{38.16}$$

由此可得

$$\frac{\delta T(\lambda)}{\delta u(z)} = \frac{\delta \Psi^{-1}(x,\lambda)}{\delta u(z)}\Phi(x,\lambda) + \Psi^{-1}(x,\lambda)\frac{\delta\Phi(x,\lambda)}{\delta u(z)}. \tag{38.17}$$

将 (38.9) 和 (38.14) 代入，由于式中的 x 是任意的，取 $x \to z^-$, 即 x 从小的方向趋于 z, 得

$$\frac{\delta T(\lambda)}{\delta u(z)} = \Psi^{-1}(z,\lambda)\sigma_+\Phi(z,\lambda). \tag{38.18}$$

对 (38.17) 取 $x \to z^+$, 即 x 从大的方向趋于 z, 也得同样结果.

现在将上式用矩阵元写出. 注意

$$(\sigma_+)_{kl} = \delta_{k1}\delta_{2l}, \tag{38.19}$$

于是得

$$\frac{\delta T_{ij}(\lambda)}{\delta u(z)} = \Psi_{i1}^{-1}(z,\lambda)\Phi_{2j}(z,\lambda). \tag{38.20}$$

再由

$$\Psi^{-1}(z,\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_2(z,\lambda) & -\psi_1(z,\lambda) \\ -\tilde{\psi}_2(z,\lambda) & \tilde{\psi}_1(z,\lambda), \end{pmatrix}, \tag{38.21}$$

即得

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u(x)} = \psi_2(x,\lambda)\phi_2(x,\lambda), \qquad -\frac{\delta\tilde{b}(\lambda)}{\delta u(x)} = \psi_2(x,\lambda)\tilde{\phi}_2(x,\lambda), \tag{38.22}$$

$$\frac{\delta b(\lambda)}{\delta u(x)} = -\tilde{\psi}_2(x,\lambda)\phi_2(x,\lambda), \qquad \frac{\delta \tilde{a}(\lambda)}{\delta u(x)} = -\tilde{\psi}_2(x,\lambda)\tilde{\phi}_2(x,\lambda). \tag{38.23}$$

同理，有

$$\frac{\delta T(\lambda)}{\delta \overline{u(z)}} = -\Psi^{-1}(z,\lambda)\sigma_- \Phi(z,\lambda). \tag{38.24}$$

由于

$$(\sigma_-)_{kl} = \delta_{k2}\delta_{1l}, \tag{38.25}$$

因此得

$$\frac{\delta T_{ij}(\lambda)}{\delta \overline{u(z)}} = -\Psi_{i2}^{-1}(z,\lambda)\Phi_{1j}(z,\lambda), \tag{38.26}$$

即

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta \overline{u(x)}} = \psi_1(x,\lambda)\phi_1(x,\lambda), \qquad -\frac{\delta \tilde{b}(\lambda)}{\delta \overline{u(x)}} = \psi_1(x,\lambda)\tilde{\phi}_1(x,\lambda), \tag{38.27}$$

$$\frac{\delta b(\lambda)}{\delta \overline{u(x)}} = -\tilde{\psi}_1(x,\lambda)\phi_1(x,\lambda), \qquad \frac{\delta \tilde{a}(\lambda)}{\delta \overline{u(x)}} = -\tilde{\psi}_1(x,\lambda)\tilde{\phi}_1(x,\lambda). \tag{38.28}$$

同理，有

$$\delta \Phi^{-1}(x,\lambda) = -\Phi^{-1}(x,\lambda)\delta \Phi(x,\lambda)\Phi^{-1}(x,\lambda), \tag{38.29}$$

当 $x > z$ 时，

$$\frac{\delta \Phi^{-1}(x,\lambda)}{\delta u(z)} = -\Phi^{-1}(z,\lambda)\sigma_+ \Phi(z,\lambda)\Phi^{-1}(x,\lambda), \tag{38.30}$$

$$\frac{\delta \Phi^{-1}(x,\lambda)}{\delta \overline{u(z)}} = \Phi^{-1}(z,\lambda)\sigma_- \Phi(z,\lambda)\Phi^{-1}(x,\lambda). \tag{38.31}$$

由于 $T^{-1}(\lambda) = \Phi^{-1}(x,\lambda)\Psi(x,\lambda)$, 所以

$$\delta T^{-1}(\lambda) = \delta \Phi^{-1}(x,\lambda)\Psi(x,\lambda) + \Phi^{-1}(x,\lambda)\delta \Psi(x,\lambda). \tag{38.32}$$

由此可得

$$\frac{\delta T^{-1}(\lambda)}{\delta u(z)}=\frac{\delta \Phi^{-1}(x,\lambda)}{\delta u(z)}\Psi(x,\lambda)+\Phi^{-1}(x,\lambda)\frac{\delta \Psi(x,\lambda)}{\delta u(z)}. \tag{38.33}$$

由于式中的 x 是任意的，取 $x\to z+0$, 上式为

$$\frac{\delta T^{-1}(\lambda)}{\delta u(z)}=-\Phi^{-1}(z,\lambda)\sigma_+\Psi(z,\lambda), \tag{38.34}$$

即

$$\frac{\delta T^{-1}_{kl}(\lambda)}{\delta u(z)}=-\Phi^{-1}_{k1}(z,\lambda)\Psi_{2l}(z,\lambda). \tag{38.35}$$

再由

$$\Phi^{-1}(z,\lambda)=\begin{pmatrix}\tilde{\phi}_2(z,\lambda) & -\tilde{\phi}_1(z,\lambda)\\ -\phi_2(z,\lambda) & \phi_1(z,\lambda),\end{pmatrix}, \tag{38.36}$$

同样得到 (38.24).

$$\frac{\delta T^{-1}(\lambda)}{\delta \overline{u(z)}}=\Phi^{-1}(z,\lambda)\sigma_-\Psi(z,\lambda), \tag{38.37}$$

即

$$\frac{\delta T^{-1}_{kl}(\lambda)}{\delta \overline{u(z)}}=\Phi^{-1}_{k2}(z,\lambda)\Psi_{1l}(z,\lambda). \tag{38.38}$$

§ 39　基本的泊松括号（连续谱情况）

现在来计算 $a(\lambda)$、$b(\lambda')$ 等的泊松括号. 一个个作起来并不困难，但是十分麻烦. 这里用一种简单的办法来一总处理. 考虑泊松括号 $\{T_{ij}(\lambda),T^{-1}_{kl}(\lambda')\}$. 这时 (38.3) 积分号下的被积函数是

$$\frac{\delta T_{ij}(\lambda)}{\delta u(x)}\frac{\delta T^{-1}_{kl}(\lambda')}{\delta \overline{u(x)}}-\frac{\delta T_{ij}(\lambda)}{\delta \overline{u(x)}}\frac{\delta T^{-1}_{kl}(\lambda')}{\delta u(x)}. \tag{39.1}$$

由于 (38.22)、(38.27)、(38.35) 和 (38.38), 上式就是

$$\Psi_{i1}^{-1}(x,\lambda)\Phi_{2j}(x,\lambda)\Phi_{k2}^{-1}(x,\lambda')\Psi_{1l}(x,\lambda') - \Psi_{i2}^{-1}(x,\lambda)\Phi_{1j}(x,\lambda)\Phi_{k1}^{-1}(x,\lambda')\Psi_{2l}(x,\lambda'). \tag{39.2}$$

我们注意，利用 NLS 方程的第一个拉克斯方程 (13.12), 容易得到

$$\partial_x\left[\Psi^{-1}(x,\lambda)\Psi(x,\lambda')\right] = i(\lambda-\lambda')\Psi^{-1}(x,\lambda)\sigma_3\Psi(x,\lambda'), \tag{39.3}$$

即

$$\partial_x\left[\Psi^{-1}(x,\lambda)\Psi(x,\lambda')\right]_{il} = i(\lambda-\lambda')\left[\Psi_{i1}^{-1}(x,\lambda)\Psi_{1l}(x,\lambda') - \Psi_{i2}^{-1}(x,\lambda)\Psi_{2l}(x,\lambda')\right]. \tag{39.4}$$

还有对 $\Phi^{-1}(x,\lambda')\Phi(x,\lambda)$ 微商类似的式子. 于是，我们对

$$\left[\Psi^{-1}(x,\lambda)\Psi(x,\lambda')\right]_{il}\left[\Phi^{-1}(x,\lambda')\Phi(x,\lambda)\right]_{kj} \tag{39.5}$$

取微商，立即得到，除了因子 $i2(\lambda-\lambda')$ 外，正是 (39.2), 也就是泊松括号 $\{T_{ij}(\lambda), T_{kl}^{-1}(\lambda')\}$ 右端表示式中的被积函数. 所以得

$$\{T_{ij}(\lambda), T_{kl}^{-1}(\lambda')\} = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2(\lambda-\lambda')} \cdot\left[\Psi^{-1}(x,\lambda)\Psi(x,\lambda')\right]_{il}\left[\Phi^{-1}(x,\lambda')\Phi(x,\lambda)\right]_{kj}\Big|_{-L}^{L}. \tag{39.6}$$

(39.6) 的括号为如下的上限部分和下限部分之和：

$$\left(e^{i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\right)_{il}\left(T^{-1}(\lambda')e^{-i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}T(\lambda)\right)_{kj}, \tag{39.7}$$

和

$$-\left(T(\lambda)e^{-i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}T^{-1}(\lambda')\right)_{il}\left(e^{i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\right)_{kj}. \tag{39.8}$$

这样，就可以求得所要的泊松括号. 例如为了求 $\{a(\lambda), b(\lambda')\}$, 取 $\{i,j,k,l\} = \{1,1,2,1,\}$, 这时下限为 0, 上限的贡献是

$$\frac{1}{2(\lambda-\lambda')}T_{21}^{-1}(\lambda')T_{11}(\lambda) + i\frac{1}{2}\pi\delta(\lambda-\lambda')T_{22}^{-1}(\lambda')T_{21}(\lambda). \tag{39.9}$$

注意第二项中 $\lambda=\lambda'$ 和 $T_{21}(\lambda')=-T_{21}^{-1}(\lambda')$, $T_{22}^{-1}(\lambda)=T_{11}(\lambda)$, 所以上式为

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\lambda-\lambda'}-i\pi\delta(\lambda-\lambda')\right\}T_{21}^{-1}(\lambda')T_{11}(\lambda). \tag{39.10}$$

我们最后得 $\{T_{11}(\lambda),T_{21}^{-1}(\lambda')\}$ 为

$$\{a(\lambda),-b(\lambda')\}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda-\lambda'+i0}a(\lambda)b(\lambda'). \tag{39.12}$$

这样的泊松括号求起来并无困难. 不过这种手工方式不仅繁琐，而且容易出差错.

下面给出一种有价值的表述. 注意 $T^{-1}(\lambda')=\sigma_2 T(\lambda')^T\sigma_2$, 于是得到

$$\{T_{ij}(\lambda),T_{mn}(\lambda')\}=(\sigma_2)_{nk}(\sigma_2)_{lm}\{T_{ij}(\lambda),T_{kl}^{-1}(\lambda')\}, \tag{39.13}$$

式中重复指标要从 1 到 2 求和，按惯例略去不写. 将 (39.7) 代入，上限部分的因子是

$$\left(e^{i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\sigma_2\right)_{im}\left(T(\lambda')^T\sigma_2 e^{-i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}T(\lambda)\right)_{nj}, \tag{39.14}$$

也就是,

$$\left(e^{i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\sigma_2\right)_{im}\left(\sigma_2 e^{-i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\right)_{pq}T_{qj}(\lambda)T_{pn}(\lambda'). \tag{39.15}$$

为了简明而确切地表述所得到的结果，引入直积. 设 A 和 B 是 2×2 矩阵，它们的直积由矩阵元定义如下：

$$(A\otimes B)_{ij,kl}=A_{ik}B_{jl}. \tag{39.16}$$

这里显示，两个 2×2 矩阵的直积是 4×4 矩阵，它的行列要用两个指标来表示，我们约定按字典排列的次序 11, 12, 21, 22. 由此看到， (39.15) 之右端最后的两因子正是

$$\left(T(\lambda)\otimes T(\lambda')\right)_{qp,jn}=T_{qj}(\lambda)T_{pn}(\lambda'). \tag{39.17}$$

它们前面的因子也是一个 4×4 矩阵， 我们以 $s_+(\lambda-\lambda')$ 来表示，即

$$s_+(\lambda-\lambda')_{im,qp}=\lim_{L\to\infty}\left(\frac{1}{2(\lambda-\lambda')}\right.$$
$$\left.\cdot\left(e^{i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\sigma_2\right)_{im}\left(\sigma_2 e^{-i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\right)_{pq}\right). \quad (39.18)$$

容易看出，由于 σ_2 只有非对角元不为 0, 所以它的显式是

$$s_+(\lambda-\lambda')=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\dfrac{1}{\lambda-\lambda'}&-i\pi\delta(\lambda-\lambda')&0\\0&i\pi\delta(\lambda-\lambda')&\dfrac{1}{\lambda-\lambda'}&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \quad (39.19)$$

将 (39.9) 代入，下限部分的因子是

$$-\left(T(\lambda)e^{-i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\sigma_2 T(\lambda')^T\right)_{im}\left(\sigma_2 e^{i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\right)_{nj}. \quad (39.20)$$

即

$$-T_{iq}(\lambda)\left(e^{-i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\sigma_2\right)_{qp}T_{mp}(\lambda')\left(\sigma_2 e^{i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\right)_{nj}. \quad (39.21)$$

这时，有

$$\left(T(\lambda)\otimes T(\lambda')\right)_{im,qp}=T_{iq}(\lambda)T_{mp}(\lambda'), \quad (39.22)$$

它们后面的因子也是一个 4×4 矩阵，我们以 $-s_-(\lambda-\lambda')$ 来表示，即

$$s_-(\lambda-\lambda')_{qp,jn}=\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2(\lambda-\lambda')}$$
$$\cdot\left(e^{i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\sigma_2\right)_{qp}\left(\sigma_2 e^{-i(\lambda-\lambda')L\sigma_3}\right)_{nj}. \quad (39.23)$$

容易看出，由于 σ_2 只有非对角元不为 0 的性质，所以它的显式是

$$s_-(\lambda-\lambda') = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda-\lambda'} & i\pi\delta(\lambda-\lambda') & 0 \\ 0 & -i\pi\delta(\lambda-\lambda') & \dfrac{1}{\lambda-\lambda'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (39.24)$$

我们再引入矩阵 A 和 B 的元的泊松括号

$$\{A \overset{\otimes}{,} B\}_{ik,jl} = \{A_{ij}, B_{kl}\}. \quad (39.25)$$

所以有

$$\{A \overset{\otimes}{,} B\} = i\int\left(\frac{\delta A}{\delta u(x)} \otimes \frac{\delta B}{\delta \overline{u(x)}} - \frac{\delta A}{\delta \overline{u(x)}} \otimes \frac{\delta B}{\delta u(x)}\right) dx. \quad (39.26)$$

于是以上的结果就简单写作

$$\begin{aligned}\{T(\lambda) \overset{\otimes}{,} T(\lambda')\} = {} & s_+(\lambda-\lambda')T(\lambda) \otimes T(\lambda') \\ & - T(\lambda) \otimes T(\lambda')s_-(\lambda-\lambda'). \end{aligned} \quad (39.27)$$

上式的左端是如下泊松括号：

$$\begin{pmatrix} \{a,a\} & -\{a,\tilde{b}\} & -\{\tilde{b},a\} & \{\tilde{b},\tilde{b}\} \\ \{a,b\} & \{a,\tilde{a}\} & -\{\tilde{b},b\} & -\{\tilde{b},\tilde{a}\} \\ \{b,a\} & -\{b,\tilde{b}\} & \{\tilde{a},a\} & -\{\tilde{a},\tilde{b}\} \\ \{b,b\} & \{b,\tilde{a}\} & \{\tilde{a},b\} & \{\tilde{a},\tilde{a}\} \end{pmatrix}. \quad (39.28)$$

它们的值就从 (39.27) 的右端算出，除因子 1/2 外，结果是

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda-\lambda'+i0}a\tilde{b} & \frac{1}{\lambda-\lambda'-i0}\tilde{b}a & 0 \\ \frac{1}{\lambda-\lambda'+i0}ab & 0 & -i2\pi\delta(\lambda-\lambda')\,a\tilde{a} & -\frac{1}{\lambda-\lambda'+i0}\tilde{b}\tilde{a} \\ \frac{1}{\lambda-\lambda'-i0}ba & i2\pi\delta(\lambda-\lambda')\,\tilde{a}a & 0 & -\frac{1}{\lambda-\lambda'-i0}\tilde{a}\tilde{b} \\ 0 & -\frac{1}{\lambda-\lambda'+i0}b\tilde{a} & -\frac{1}{\lambda-\lambda'-i0}\tilde{a}b & 0 \end{pmatrix}. \quad (39.29)$$

这里，由于版面所限，不得不略去所含的宗量．各项的第 1 个因子的宗量是 λ, 第 2 个因子的宗量是 λ'. 于是，我们得到

$$\{a(\lambda),a(\lambda')\}=0,\quad \{a(\lambda),\tilde{a}(\lambda')\}=0,\quad \{\tilde{a}(\lambda),\tilde{a}(\lambda')\}=0, \tag{39.30}$$

$$\{b(\lambda),b(\lambda')\}=0,\qquad \{\tilde{b}(\lambda),\tilde{b}(\lambda')\}=0, \tag{39.31}$$

$$\{a(\lambda),b(\lambda')\}=\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda-\lambda'+i0}a(\lambda)b(\lambda'), \tag{39.32}$$

$$\{a(\lambda),\tilde{b}(\lambda')\}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda-\lambda'+i0}a(\lambda)\tilde{b}(\lambda'), \tag{39.33}$$

$$\{\tilde{a}(\lambda),\tilde{b}(\lambda')\}=\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda-\lambda'-i0}\tilde{a}(\lambda)\tilde{b}(\lambda'), \tag{39.34}$$

$$\{\tilde{a}(\lambda),b(\lambda')\}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda-\lambda'-i0}\tilde{a}(\lambda)b(\lambda'), \tag{39.35}$$

$$\{b(\lambda),\tilde{b}(\lambda')\}=i\pi\delta(\lambda-\lambda')|a(\lambda)|^2. \tag{39.36}$$

现在写下 (39.22) 的另一个表示式，

$$\begin{aligned}\{T(\lambda)\overset{\otimes}{,}T(\lambda')\}=&\ r_+(\lambda-\lambda')T(\lambda)\otimes T(\lambda')\\ &-T(\lambda)\otimes T(\lambda')r_-(\lambda-\lambda'),\end{aligned} \tag{39.37}$$

式中

$$r_+(\lambda-\lambda')=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\lambda-\lambda'} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\pi\delta(\lambda-\lambda') & 0\\ 0 & i\pi\delta(\lambda-\lambda') & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda-\lambda'}\end{pmatrix} \tag{39.38}$$

和

$$r_-(\lambda-\lambda')=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\lambda-\lambda'} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i\pi\delta(\lambda-\lambda') & 0\\ 0 & -i\pi\delta(\lambda-\lambda') & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\lambda-\lambda'}\end{pmatrix}. \tag{39.39}$$

由 (39.27) 的右端和 (39.37) 的右端各对应元相等，(39.37) 是正确的．(39.37) 通常是由经典的 r- 矩阵方法导出的．r- 矩阵方

法是一种有效的十分重要的方法. 但它的推演相当复杂. 这里用初等的手续导出了它的最后公式 (39.37).

§ 40 基本的泊松括号 (分离谱情况)

连续谱情况的泊松括号中，有一些可以解析延拓到 λ 的上半平面，或下半平面，从而立即得到某些分离谱情况下的泊松括号. 由于 $\{a(\lambda), a(\lambda')\} = 0$ 可以解析延拓到上半平面，现将 $a(\lambda)$ 中的 λ 取在上半平面，即 $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$, 由 (16.28), 即

$$a(\lambda) = \prod_{n=1}^{N} \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \bar{\lambda}_n} \check{a}(\lambda), \tag{40.1}$$

这里 $\check{a}(\lambda)$ 在上半平面解析，无零点，由 $\{\ln a(\lambda), a(\lambda')\} = 0$ 得

$$\{\ln \check{a}(\lambda), a(\lambda')\} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\{\lambda_n, a(\lambda')\}}{\lambda - \lambda_n} - \frac{\{\bar{\lambda}_n, a(\lambda')\}}{\lambda - \bar{\lambda}_n} \right) = 0. \tag{40.2}$$

这式在 λ_n 处不可能有极点，所以

$$\{\lambda_n, a(\lambda')\} = 0. \tag{40.3}$$

因为 (40.1) 中的 λ 限于上半平面，所以对后项不能得到什么. 但从 $\{\tilde{a}(\lambda), a(\lambda')\} = 0$, 若将 λ 取在下半平面，类似的手续，便可得到

$$\{\bar{\lambda}_n, a(\lambda')\} = 0. \tag{40.4}$$

同样，从 $\{a(\lambda), \tilde{a}(\lambda')\} = 0$ 和 $\{\tilde{a}(\lambda), \tilde{a}(\lambda')\} = 0$, 可以得到

$$\{\lambda_n, \tilde{a}(\lambda')\} = 0, \tag{40.5}$$

$$\{\bar{\lambda}_n, \tilde{a}(\lambda')\} = 0. \tag{40.6}$$

再将以上四式的 λ' 相应的取在上、下半平面，同样手续可得，

$$\{\lambda_n, \lambda_m\} = 0, \quad \{\lambda_n, \bar{\lambda}_m\} = 0. \tag{40.7}$$

从 (39.31), 得

$$\{\ln a(\lambda), b(\lambda')\} = -b(\lambda')\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda - \lambda' + i0}. \tag{40.8}$$

用上面同样的手续，上式左端化为

$$\{\ln \check{a}(\lambda), b(\lambda')\} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\{\lambda_n, b(\lambda')\}}{\lambda - \lambda_n} - \frac{\{\bar{\lambda}_n, b(\lambda')\}}{\lambda - \bar{\lambda}_n}\right). \tag{40.9}$$

因为 $\operatorname{Im}\lambda > 0$, 而 λ' 是实的，所以

$$\lambda - \lambda' + i0 \neq 0. \tag{40.10}$$

这表明， λ_n 不会是 (40.8) 的极点．于是

$$\{\lambda_n, b(\lambda')\} = 0. \tag{40.11}$$

类似的手续可以证明，

$$\{\bar{\lambda}_n, b(\lambda')\} = 0. \tag{40.12}$$

但是，含有 b_n 或 $\tilde{b}_m$ 的泊松括号，如果作 $u(x)$ 具有紧致的台集的假定，则含 $b(\lambda)$ 或 $\tilde{b}(\lambda)$ 的泊松括号也可以解析延拓到实轴之外某一区域，而且这时有 $b_n = b(\lambda_n)$ 和 $\tilde{b}_m = \tilde{b}(\bar{\lambda}_m)$. 这样，从 (39.31) 和 (39.32) 立即得到

$$\{a(\lambda),\, b_n\} = \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda - \lambda_n}a(\lambda)b_n \tag{40.13}$$

和

$$\{a(\lambda),\, \tilde{b}_m\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}_m}a(\lambda)\tilde{b}_m. \tag{40.14}$$

同理，从 (39.33) 和 (39.34) 得

$$\{\tilde{a}(\lambda),\,\tilde{b}_m\} = \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}_m}\tilde{a}(\lambda)\tilde{b}_m \tag{40.15}$$

和

$$\{\tilde{a}(\lambda),\,b_n\} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}\tilde{a}(\lambda)b_n. \tag{40.16}$$

由 (39.30) 和 (39.35) 可以得到

$$\{b(\lambda),\,b_n\} = 0 \tag{40.17}$$

和

$$\{b(\lambda),\,\tilde{b}_m\} = 0. \tag{40.18}$$

再进一步，就得到

$$\begin{aligned}\{b_n,\,b_m\} &= 0,\\ \{b_n,\,\tilde{b}_m\} &= 0.\end{aligned} \tag{40.19}$$

由 (40.13), 得

$$\{\ln\,a(\lambda),\,b_n\} = \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}b_n. \tag{40.20}$$

用如上类似的手续，上式左端为

$$\{\ln\,\check{a}(\lambda),\,b_n\} + \sum_m\left(\frac{\{\bar{\lambda}_m, b_n\}}{\lambda-\bar{\lambda}_m} - \frac{\{\lambda_m, b_n\}}{\lambda-\lambda_m}\right). \tag{40.21}$$

此式在 λ_n 处有一个一阶极点，比较，得

$$\{\lambda_m,\,b_n\} = \delta_{mn}\frac{1}{2}b_n \tag{40.22}$$

和

$$\{\bar{\lambda}_m,\,b_n\} = 0. \tag{40.23}$$

类似地，有

$$\{\bar{\lambda}_m,\ \tilde{b}_n\} = \delta_{mn}\frac{1}{2}\tilde{b}_n \tag{40.24}$$

和

$$\{\lambda_m,\ \tilde{b}_n\} = 0. \tag{40.25}$$

如果不作 $u(x)$ 存在紧致的台集的假定，一般导出以上诸式就比较麻烦.

§ 41 哈密顿形式

容易看出， NLS 方程 (2.1) 可以表为哈密顿形式，

$$u_t = \{H, u\} = -i\frac{\delta H}{\delta \overline{u}}, \tag{41.1}$$

式中 H 由 (38.1) 表示. 在 § 25 已经得到 NLS 方程的无穷多个守恒律. 如 (25.8) 为

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(u\bar{u}_{xx} + |u|^4\right) dx, \tag{41.2}$$

分部积分后，与 (38.1) 比较，可见

$$H = -I_3. \tag{41.3}$$

将 (25.13) 代入，得

$$H = i8\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3}\left(\bar{\lambda}_n^3 - \lambda_n^3\right) - \frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|a(\lambda')|^2 \lambda'^2\, d\lambda'. \tag{41.4}$$

在 (38.1) 中 H 由 $u(x,t)$ 和它对 x 的导数表出. 这里 H 由散射数据表出. 这说明，散射数据可以完整地描述 NLS 方程.

注意 (39.29) 等，即 $a(\lambda)$ 与 $a(\lambda')$、$\tilde{a}(\lambda')$、λ_n 和 $\bar{\lambda}_n$ 的泊松括号，由方程

$$\partial_t a(\lambda) = \{a(\lambda), H\} \tag{41.5}$$

可得

$$\partial_t a(\lambda) = 0, \quad a(\lambda, t) = a(\lambda, 0). \tag{41.6}$$

由于

$$\{|a(\lambda)|^2, b(\lambda')\} = \tilde{a}(\lambda)\{a(\lambda), b(\lambda')\} + a(\lambda)\{\tilde{a}(\lambda), b(\lambda')\}, \tag{41.7}$$

再由 (39.31) 和 (39.34), 得

$$\{|a(\lambda)|^2, b(\lambda')\} = i\pi\delta(\lambda - \lambda')|a(\lambda)|^2 b(\lambda'), \tag{41.8}$$

即

$$\{\ln|a(\lambda)|^2, b(\lambda')\} = i\pi\delta(\lambda - \lambda')b(\lambda'). \tag{41.9}$$

于是，由 (41.3), 有

$$\{H, b(\lambda)\} = -4\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{b(\lambda), \ln|a(\lambda')|^2\}\lambda'^2 d\lambda'. \tag{41.10}$$

利用 (41.6), 得

$$\partial_t b(\lambda) = \{H, b(\lambda)\} = -i4\lambda^2 b(\lambda). \tag{41.11}$$

所以，得

$$b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{-i4\lambda^2 t}. \tag{41.12}$$

由 (40.10) 和 (40.13), 得到

$$\{|a(\lambda)|^2, b_n\} = 0. \tag{41.13}$$

所以，注意 (40.18) 和 (40.19),

$$\{\lambda_m^3, b_n\} = 3\lambda_m^2\{\lambda_m, b_n\} = \frac{3}{2}\delta_{mn}\lambda_m^2 b_n, \tag{41.14}$$

就得到

$$\partial_t b_n = \{H, b_n\} = -i4\lambda_n^2 b_n. \tag{41.15}$$

也就是

$$b_n(t) = b_n(0)e^{-i4\lambda_n^2 t}. \tag{41.16}$$

§ 42 作用变量和角变量

我们现在来证明，对于 NLS 方程的系统，可以引入作用变量和角变量. 它们是：对连续谱，

$$P(\lambda) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|a(\lambda)|^2}, \qquad Q(\lambda) = \arg b(\lambda) \tag{42.1}$$

(它们是实的). 对分离谱，

$$P_n = 2\lambda_n, \qquad Q_n = \ln\frac{1}{b_n} \tag{42.2}$$

(它们是复的). 所以我们又引入

$$P_n' = 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_n, \qquad P_n'' = 2\,\mathrm{Im}\,\lambda_n \tag{42.3}$$

和

$$Q_n' = \ln|b_n|, \qquad Q_n'' = -\arg b_n. \tag{42.4}$$

让我们回忆一下作用变量和角变量的意义. 首先，它们是广义坐标和共轭动量，因此满足正则关系，即

$$\{P(\lambda), Q(\lambda')\} = \delta(\lambda - \lambda') \tag{42.5}$$

和

$$\{P_n', Q_m'\} = \{P_n'', Q_m''\} = \delta_{nm}. \tag{42.6}$$

其次，作用变量将是守恒量，而角变量以特定周期依赖于 t. 事实上，由于 (42.1) 和 (42.2), 哈密顿量可以表为

$$H = i\sum_n \frac{1}{3}\left(\bar{P}_n^3 - P_n^3\right) + 4\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 P(\lambda)\, d\lambda, \tag{42.7}$$

即

$$H = \sum_n \frac{1}{3}\left(6P_n'^2 P_n'' - 2P_n''^3\right) + 4\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 P(\lambda)\, d\lambda. \tag{42.8}$$

于是，十分显然， $P(\lambda)$、P_n' 和 P_n'' 与 H 的泊松括号为 0, 所以它们不依赖于 t, 它们是守恒量，是作用变量. 利用 (42.5), 容易得到

$$\partial_t Q(\lambda) = \{H, Q(\lambda)\} = 4\lambda^2, \tag{42.9}$$

即

$$Q(\lambda, t) = Q(\lambda, 0) + 4\lambda^2 t. \tag{42.10}$$

利用 (42.6), 得

$$\partial_t Q_n' = \{H, Q_n'\} = 4P_n' P_n'', \tag{42.11}$$

$$\partial_t Q_n'' = \{H, Q_n''\} = -2P_n''^2. \tag{42.12}$$

所以，最后得到

$$Q_n'(t) = Q_n'(0) + 4P_n' P_n'' t, \tag{42.13}$$

$$Q_n''(t) = Q_n''(0) - 2P_n''^2 t. \tag{42.14}$$

于是，我们看到， $Q(\lambda)$、Q_n' 和 Q_n'' 的确是角变量.

现在来证明前面未作证明的 (42.5) 和 (42.6), 以及除此而外的泊松括号均为 0. 我们先证明

$$\{Q(\lambda), Q(\lambda')\} = 0. \tag{42.15}$$

事实上，有

$$\{e^{i2Q(\lambda)}, e^{i2Q(\lambda')}\} = \left\{\frac{b(\lambda)}{\overline{b(\lambda)}}, \frac{b(\lambda')}{\overline{b(\lambda')}}\right\}, \tag{42.16}$$

而右端又显然为

$$-\frac{b(\lambda')}{\overline{b(\lambda)}\,\overline{b(\lambda')^2}}\{b(\lambda),\,\overline{b(\lambda')}\}-\frac{b(\lambda)}{\overline{b(\lambda)^2}\,\overline{b(\lambda')}}\{\overline{b(\lambda)},\,b(\lambda')\}=0. \quad (42.17)$$

其次，对于 $|a(\lambda)|^2$ 的函数 $f(|a(\lambda)|^2)$，有

$$\{f(|a(\lambda)|^2),\,Q(\lambda')\}=\frac{f'(|a(\lambda)|^2)}{i2}\left\{|a(\lambda)|^2,\,\ln\frac{b(\lambda')}{\overline{b(\lambda')}}\right\}. \quad (42.18)$$

不难看出，右端就是

$$\frac{f'(|a(\lambda)|^2)}{i2}\frac{\overline{b(\lambda')}}{b(\lambda')}\left\{|a(\lambda)|^2,\,\frac{b(\lambda')}{\overline{b(\lambda')}}\right\}. \quad (42.19)$$

进一步，得

$$\{f(\,|a(\lambda)|^2),\,Q(\lambda')\}=\tfrac{f'(|a(\lambda)|^2)}{i2}\tfrac{\overline{b(\lambda')}}{b(\lambda')}$$
$$[2mm]\cdot\left(\tfrac{1}{\overline{b(\lambda')}}\{|a(\lambda)|^2,\,b(\lambda')\}-\tfrac{b(\lambda')}{\overline{b(\lambda')}^2}\{|a(\lambda)|^2,\,\overline{b(\lambda')}\}\right). \quad (42.20)$$

利用 (41.9) 等，立即得到

$$\{f(|a(\lambda)|^2),\,Q(\lambda')\}=-\pi\delta(\lambda-\lambda')\frac{f'(|a(\lambda)|^2)}{i2}|a(\lambda)|^2. \quad (42.21)$$

所以，若取

$$f(|a(\lambda)|^2)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|a(\lambda)|^2}, \quad (42.22)$$

则由 (42.20) 就得证 (42.5).

由 (40.20) 等，立即得到

$$\{2\lambda_m,\,\ln b_n\}=\delta_{mn}, \quad (42.23)$$

$$\{2\lambda_m,\,\ln\tilde{b}_n\}=0. \quad (42.24)$$

注意

$$\ln b_n = \ln |b_n| + i \arg b_n, \quad \ln \tilde{b}_n = \ln |b_n| - i \arg b_n, \tag{42.25}$$

就得到 (42.2).

这样，我们对 NLS 方程就导出了它的哈密顿公式系统. 由此使我们对 NLS 方程的完全可积性有了更明确的理解，即它可以化为一个由作用变量和角变量表出的哈密顿系统. 在力学中，我们称这样的系统是 **多重周期系统**.

但是，我们千万不可误解，以为将 NLS 方程以哈密顿公式表出，方程就解出了. 在本章一开始就已指出，这实际上是作正则变换. 它对应于前面讨论的散射问题. 而变换函数本身并非显式，因而，只是由变换函数的应有性质来确定变换的结果. 要确定变换函数，就是求非线性方程对应的拉克斯方程的约斯特解的显式，从而也就是求出非线性方程的解. 这是反散射变换所解决的问题.

建立 NLS 方程的哈密顿公式系统还有一个重要意义，它提供 NLS 方程的量子化理论的一个经典对应. 从以上说明可见，建立了量子化理论，并不等于解出了量子的 NLS 方程. 要解出它，要用到现在已建立的量子的反散射方法或其他方法. 这里我们还要注意，行列式是不存在量子对应的，所以适应于量子化理论的要求，经典的哈密顿公式系统的推演要避免行列式，如朗斯基行列式. 这将使推演更为复杂. 本章未采用这样的讲述方式.

以上介绍了 NLS 方程的哈密顿公式系统，虽然比较复杂，但属于标准的形式. 我们注意，对 NLS 方程，它的正则共轭量是 $u(x)$ 和 $p(x) = \overline{i\, u(x)}$. 于是得到 $u(x)$ 和 $\overline{u(y)}$ 的泊松括号. 随后的论述，力学量就作为 $u(x)$ 和 $\overline{u(x)}$ 的泛函来处理的. 对 KdV 方程，由于是实的，显然类似的方式做不到. 因此 KdV 方程的哈密顿公式系统不可能属于标准的形式. 这里我们不加讨论.

第 5 章

NLS$^+$ 方程

反号的非线性薛定谔方程 (我们记作 NLS$^+$ 方程) 也是一个重要的非线性演化方程. 它可以用来描述譬如在正常群速色散范围内的短脉冲 (皮秒, 10^{-12} 秒量级) 在单模光纤中的传播. 若干年前, 它已被证明是完全可积的. 在边值为零时, 它没有孤子解. 但在边值为非零的常数时, 萨哈诺夫和沙巴特改进了反散射方法而完成了求解. 求得了一种称为暗孤子解的特殊形式的解. 通常的 NLS 方程的孤子解 (有时强调称为亮孤子解) 的特征前面已经得知. 譬如一个亮的单孤子解, 它是一个形态几乎处处为 0 只在一个小的局部范围内不为 0 的波包.

NLS$^+$ 方程在边值非 0 时的暗孤子解则具有另一种特征. 譬如一个暗的单孤子解, 则是几乎处处为非 0 的常数只在一个小的局部范围内取小于此常数的值或为 0 的波谷. 换句话说, 是亮的背景中的一个暗斑. 但是, 二者的共同特性是以常数速度运动和在相互作用后保持形态不变.

在边值非 0 的 NLS$^+$ 方程的反散射方法求解中, 除了通常的谱参数 λ 外, 将出现另一参数 κ, 它是 λ 的双值函数. 在萨哈诺夫和沙巴特当年求解时, 为此引入了黎曼面来处理. 但是, 他们最后指出, 可以用引入仿射参数 ζ 来避免引入黎曼面造成的复杂. 随后, 塔赫塔詹和法捷也夫在他们的书 (见参考文献 [3]) 中, 用了仿射参数. 本章也将用仿射参数 ζ 来展开求解的反散射变换方法.

这里指出边值非 0 的 NLS$^+$ 方程的反散射解法中的一些特殊的性质. 以 ρ 表示解 $u(x,t)$ 在 $x \to \pm\infty$ 时所趋于的复常数的模, 以 α 表示此二复常数的相的差. 我们知道透射系数的极点 ζ_n 决定孤子

解 (这里是暗孤子解), 这里证明了, 它们必位于复 ζ 平面的上半平面, 圆心在原点 O, 半径为 ρ 的上半圆弧上, 且一定是简单极点. 而上述边值的相差 α 等于 ζ_n 的辐角之和.

§ 43 NLS$^+$ 方程和它的拉克斯对

NLS$^+$ 方程是

$$iq_t - q_{xx} + 2|q|^2 q = 0. \tag{43.1}$$

设 $q = ue^{i\rho^2 t}$, 这里 ρ 是一个正的常数, 得到

$$iu_t - u_{xx} + 2\left(|u|^2 - \rho^2\right) u = 0. \tag{43.2}$$

为了求解它, 加上边界条件

$$|u| \to \rho, \qquad \text{当 } x \to \pm\infty \text{ 时}, \tag{43.3}$$

我们将边界条件写作

$$\begin{cases} u \to \rho, & \text{当 } x \to +\infty \text{ 时}, \\ u \to \rho e^{i\alpha}, & \text{当 } x \to -\infty \text{ 时}, \end{cases} \tag{43.4}$$

这里 α 是一个任意常数. 对于相, 还有别的取法, 但可以由此处的取而法简单得到.

按拉克斯, 引入如下方程

$$\partial_x \Phi(\zeta) = L(\zeta)\Phi(\zeta) \tag{43.5}$$

和

$$\partial_t \Phi(\zeta) = M(\zeta)\Phi(\zeta), \tag{43.6}$$

式中

$$L(\zeta) = -i\lambda\sigma_3 + U, \tag{43.7}$$

$$M(\zeta) = i2\lambda^2\sigma_3 - 2\lambda U + i\left(U^2 - \rho^2 + U_x\right)\sigma_3, \tag{43.8}$$

且

$$U=\begin{pmatrix} 0 & u \\ \bar{u} & 0 \end{pmatrix}, \tag{43.9}$$

这里 λ 是通常的谱参数. 以下可见, 宜于引入另一个参数 ζ 而将 λ 看作是 ζ 的函数.

(43.5) 和 (43.6) 的相容性条件导致

$$L_t-M_x+[L,M]=0. \tag{43.10}$$

将 (43.7) 和 (43.8) 代入 (43.10), 得

$$U_t-iU_x\sigma_3+i2(U^2-\rho^2)U\sigma_3=0, \tag{43.11}$$

这里要求 λ 独立于 t,

$$\lambda_t=0. \tag{43.12}$$

(43.11) 等价于 (43.2).

在极限 $x\to\infty$ 下, 由 (43.4) 得到

$$L(\zeta)\to L_0(\zeta)=-i\lambda\sigma_3+U_0, \qquad x\to+\infty, \tag{43.13}$$

式中

$$U_0=\rho\sigma_1. \tag{43.14}$$

这时 (43.5) 化为

$$\partial_x E(x,\zeta)=L_0(\zeta)E(x,\zeta). \tag{43.15}$$

连续谱是实数的 λ, 且 $\lambda^2\geq\rho^2$,

$$E(x,\zeta)=\begin{pmatrix} 1 & -i\rho^{-1}(\lambda-\kappa) \\ i\rho^{-1}(\lambda-\kappa) & 1 \end{pmatrix} e^{-i\kappa x\sigma_3}, \tag{43.16}$$

这里

$$\kappa=\sqrt{\lambda^2-\rho^2} \tag{43.17}$$

是 λ 的双值函数. 因而，需要引入黎曼面来处理，但比较复杂. 还有另一种方法，引入一个辅助参数 ζ, 使 λ 和 κ 都是 ζ 的单值函数:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\zeta + \rho^2\zeta^{-1}\right) \tag{43.18}$$

和

$$\kappa = \frac{1}{2}\left(\zeta - \rho^2\zeta^{-1}\right). \tag{43.19}$$

(43.16) 现在表为

$$E(x,\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & -i\rho\zeta^{-1} \\ i\rho\zeta^{-1} & 1 \end{pmatrix} e^{-i\kappa x\sigma_3}. \tag{43.20}$$

用如下条件定义 (43.5) 的约斯特解

$$\Psi(x,\zeta) \to E(x,\zeta), \qquad \text{当 } x \to +\infty \text{ 时}. \tag{43.21}$$

它满足下列积分方程

$$\Psi(x,\zeta) = E(x,\zeta) - \int_x^\infty E(x,\zeta)E^{-1}(y,\zeta) \cdot \{U(y) - U_0\}\,\Psi(y,\zeta)\,dy. \tag{43.22}$$

以算子 $\{\partial_x - L_0(\zeta)\}$ 作用，所得方程是

$$\{\partial_x - L_0(\zeta)\}\,\Psi(x,\zeta) = \{U(y) - U_0\}\,\Psi(y,\zeta). \tag{43.23}$$

它正是 (43.5).

(43.23) 是沃泰拉 (V.Volterra) 型积分方程. 由此方程用迭代法得 $\Psi(x,\zeta)$ 比较复杂. 如通常一样，设 $\Psi(x,\zeta)$ 可以用如下积分表示:

$$\Psi(x,\zeta) = E(x,\zeta) + \int_x^\infty K(x,y)E(y,\zeta)\,dy, \tag{43.24}$$

这里 $K(x,y)$ 是独立于 ζ 的 2×2 矩阵函数．它满足

$$K(x,+\infty)=0. \tag{43.25}$$

将 (43.24) 代入 (43.5), 分部积分消去 λ 后，得到

$$K(x,x)-\sigma_3 K(x,x)\sigma_3+U(x)-U_0=0 \tag{43.26}$$

和

$$K_x(x,x)+\sigma_3 K_y(x,x)\sigma_3-U(x)K(x,y)+\sigma_3 K(x,y)\sigma_3 U_0=0, \tag{43.27}$$

这里 $x<y$. 以对角部分 $K^d(x,y)$ 和非对角部分 $K^o(x,y)$ 表出后，(43.26) 和 (43.27) 成为

$$2K^o(x,x)+U(x)-U_0=0, \tag{43.28}$$

$$K_x^d(x,y)+K_y^d(x,y)-U(x)K^o(x,y)-K^o(x,y)U_0=0 \tag{43.29}$$

和

$$K_x^o(x,y)-K_y^o(x,y)-U(x)K^d(x,y)+K^d(x,y)U_0=0. \tag{43.30}$$

引入新变量 z, 使 x 和 y 是它的线性函数，(43.29) 可以表为对 z 的常微分方程，考虑到 (43.27), 我们得到

$$K^d(x,y)=-\int_x^\infty \{U(z)K^o(z,z-x+y) \\ +K^o(z,z-x+y)U_0\}\,dz. \tag{43.31}$$

类似地，由 (43.30) 有

$$K^o(x,y)=-\frac{1}{2}\left\{U\left(\frac{x+y}{2}\right)-U_0\right\}-\int_x^{\frac{x+y}{2}}\{U(z)K^d(z,-z+x+y) \\ -K^d(z,-z+x+y)U_0\}\,dz. \tag{43.32}$$

此二者都是沃泰拉型积分方程．由迭代而得的解是绝对收敛的．在条件 (43.28) 下，$K(x,y)$ 相对于 x 和 y 是无限可微的，且相对于 y

当 $y \to \infty$ 时是许瓦兹意义下可微的. 因此, 以上引入的积分表示 (43.24) 成立.

类似地, 有

$$L(\zeta) \to L_-(\zeta) = -i\lambda\sigma_3 + U_-, \qquad \text{当} x \to -\infty \text{时} \tag{43.33}$$

这里

$$U_- = Q(\alpha)U_0Q^{-1}(\alpha), \tag{43.34}$$

$$Q(\alpha) = e^{-i\frac{1}{2}\alpha\sigma_3}. \tag{43.35}$$

因此

$$\partial_x E_-(x,\zeta) = L_-(\zeta)E_-(x,\zeta) \tag{43.36}$$

有解

$$E_-(x,\zeta) = Q^{-1}(\alpha)E(x,\zeta). \tag{43.37}$$

定义

$$\Phi(x,\zeta) \to E_-(x,\zeta). \qquad \text{当} x \to -\infty \text{时} \tag{43.38}$$

也有积分表示

$$\Phi(x,\zeta) = E_-(x,\zeta) + \int_{-\infty}^{x} N(x,y)E_-(y,\zeta)\,dy, \tag{43.39}$$

这里

$$N(x,-\infty) = 0. \tag{43.40}$$

§ 44 约斯特解的简单性质

在复 ζ 平面, 我们画一个圆心在 O, 半径为 ρ 的圆, 以下简称 ρ- 圆. 复 ζ 平面由实轴和 ρ- 圆分割为四个区域. 容易看出如下对应:

$$\begin{aligned} &\zeta \text{ 实数}, && \lambda \text{ 实数}, \lambda^2 \geq \rho^2, && \kappa \text{ 实数} \\ &\zeta \text{ 在 } \rho\text{- 圆上}, && \lambda \text{ 实数}, \lambda^2 \leq \rho^2, && \kappa \text{ 纯虚数}, |\kappa| \leq \rho. \end{aligned} \tag{44.1}$$

实数的 ζ 对应于 λ 的连续谱和实数的 κ. 在此情况下， (43.15) 有两个独立的二分量解， $E_{\cdot 1}(x,\zeta)$ 和 $E_{\cdot 2}(x,\zeta)$.

由 (43.21) 可见，对于实数的 ζ,(43.5) 有两个独立的二分量解 $\Psi_{\cdot 1}(x,\zeta)$ 和 $\Psi_{\cdot 2}(x,\zeta)$. 类似地，由 (43.38) 又可见 (43.5) 又有两个独立的二分量解 $\Phi_{\cdot 1}(x,\zeta)$ 和 $\Phi_{\cdot 2}(x,\zeta)$. 但是，方程的这两对二分量解是线性相关的. 引入单式矩阵 $T(\zeta)$:

$$\Phi(x,\zeta) = \Psi(x,\zeta)T(\zeta), \tag{44.2}$$

这里 $T(\zeta)$ 是

$$T(\zeta) = \begin{pmatrix} a(\zeta) & \tilde{b}(\zeta) \\ b(\zeta) & \tilde{a}(\zeta) \end{pmatrix}. \tag{44.3}$$

对实数的 ζ, 由 (43.7) 和 (43.23) 得到

$$\sigma_1 \overline{L(x,\zeta)} \sigma_1 = L(x,\zeta) \tag{44.4}$$

和

$$\sigma_1 \overline{E(x,\zeta)} \sigma_1 = E(x,\zeta). \tag{44.5}$$

因此，与 (43.23) 一起，得

$$\sigma_1 \overline{\Psi(x,\zeta)} \sigma_1 = \Psi(x,\zeta). \tag{44.6}$$

写下

$$\Psi(x,\zeta) = \left(\tilde{\psi}(x,\zeta) \quad \psi(x,\zeta)\right), \tag{44.7}$$

得

$$\tilde{\psi}(x,\zeta) = \sigma_1 \overline{\psi(x,\zeta)}. \tag{44.8}$$

类似地，有

$$\sigma_1 \overline{E_-(x,\zeta)} \sigma_1 = E_-(x,\zeta), \tag{44.9}$$

$$\sigma_1 \overline{\Phi(x,\zeta)} \sigma_1 = \Phi(x,\zeta), \tag{44.10}$$

$$\Phi(x,\zeta) = \left(\phi(x,\zeta) \quad \tilde{\phi}(x,\zeta)\right) \tag{44.11}$$

和

$$\tilde{\phi}(x,\zeta)=\sigma_1\overline{\phi(x,\zeta)}. \tag{44.12}$$

我们又有

$$\sigma_1\overline{T(\zeta)}\sigma_1=T(\zeta), \tag{44.13}$$

$$\tilde{a}(\zeta)=\overline{a(\zeta)} \tag{44.14}$$

和

$$\tilde{b}(\zeta)=\overline{b(\zeta)}. \tag{44.15}$$

由 (44.2), 得

$$\phi(x,\zeta)=a(\zeta)\tilde{\psi}(x,\zeta)+b(\zeta)\psi(x,\zeta) \tag{44.16}$$

和

$$\tilde{\phi}(x,\zeta)=\tilde{b}(\zeta)\tilde{\psi}(x,\zeta)+\tilde{a}(\zeta)\psi(x,\zeta). \tag{44.17}$$

由 (43.20), 可得

$$\det\ \Psi(x,\zeta)=\det\ \Phi(x,\zeta)=\det E(x,\zeta)=1-\rho^2\zeta^{-2}. \tag{44.18}$$

这导致

$$\det T(\zeta)=1, \tag{44.19}$$

即

$$|a(\zeta)|^2-|b(\zeta)|^2=1. \tag{44.20}$$

由 (44.2), 有

$$\Psi(x,\zeta)=\Phi(x,\zeta)T^{-1}(\zeta). \tag{44.21}$$

显然

$$T^{-1}(\zeta)=\begin{pmatrix}\tilde{a}(\zeta) & -\tilde{b}(\zeta)\\ -b(\zeta) & a(\zeta)\end{pmatrix}. \tag{44.22}$$

(44.21) 给出

$$\tilde{\psi}(x,\zeta)=\tilde{a}(\zeta)\phi(x,\zeta)-b(\zeta)\tilde{\phi}(x,\zeta) \tag{44.23}$$

和

$$\psi(x,\zeta) = -\tilde{b}(\zeta)\phi(x,\zeta) + a(\zeta)\tilde{\phi}(x,\zeta). \tag{44.24}$$

$\Psi(x,\zeta)$ 之逆是

$$\Psi^{-1}(x,\zeta) = \left(1-\rho^2\zeta^{-2}\right)^{-1}\begin{pmatrix} \psi_2(x,\zeta) & -\psi_1(x,\zeta) \\ -\tilde{\psi}_2(x,\zeta) & \tilde{\psi}_1(x,\zeta) \end{pmatrix}. \tag{44.25}$$

因此 (44.2) 导出

$$T(\zeta) = \Psi^{-1}(x,\zeta)\Phi(x,\zeta). \tag{44.26}$$

于是，得

$$a(\zeta) = \left(1-\rho^2\zeta^{-2}\right)^{-1} W\Big[\phi(x,\zeta),\ \psi(x,\zeta)\Big], \tag{44.27}$$

$$b(\zeta) = \left(1-\rho^2\zeta^{-2}\right)^{-1} W\Big[\tilde{\psi}(x,\zeta),\ \phi(x,\zeta)\Big], \tag{44.28}$$

$$\tilde{a}(\zeta) = \left(1-\rho^2\zeta^{-2}\right)^{-1} W\Big[\tilde{\psi}(x,\zeta),\ \tilde{\phi}(x,\zeta)\Big] \tag{44.29}$$

和

$$\tilde{b}(\zeta) = \left(1-\rho^2\zeta^{-2}\right)^{-1} W\Big[\tilde{\phi}(x,\zeta),\ \psi(x,\zeta)\Big]. \tag{44.30}$$

这里，朗斯基行列式定义作

$$W\Big[\phi(x,\zeta),\ \psi(x,\zeta)\Big] = \det\left(\phi(x,\zeta)\ \psi(x,\zeta)\right). \tag{44.31}$$

由 (43.24) 等，我们有

$$\sigma_1\overline{K(x,y)}\sigma_1 = K(x,y). \tag{44.32}$$

即

$$K_{22}(x,y) = \overline{K_{11}(x,y)}, \qquad K_{12}(x,y) = \overline{K_{21}(x,y)}. \tag{44.33}$$

同理，得

$$\sigma_1\overline{N(x,y)}\sigma_1 = N(x,y). \tag{44.34}$$

即

$$N_{22}(x,y)=\overline{N_{11}(x,y)}, \qquad N_{12}(x,y)=\overline{N_{21}(x,y)}. \tag{44.35}$$

由约斯特解 $\Psi(x,\zeta)$ 的积分表示，(43.24), 可见 $\psi(x,\zeta)$ 可以解析地延拓到复 ζ 的上半平面，而 $\tilde{\psi}(x,\zeta)$ 延拓到下半平面. 事实上，

$$\psi(x,\zeta)e^{-i\kappa x}=\begin{pmatrix} -i\rho\zeta^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} + \int_x^\infty K(x,y)\begin{pmatrix} -i\rho\zeta^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\kappa(x-y)}dy \tag{44.36}$$

在复 ζ 的上半平面，$\operatorname{Im}\kappa>0$, 被积函数的指数由于 $y>x$ 不仅有界，且衰减.

类似地，$\phi(x,\zeta)$ 和 $\tilde{\phi}(x,\zeta)$ 可以分别解析地延拓到复 ζ 的上和下半平面. 由 (44.27) 和 (44.29), 又得到 $a(\zeta)$ 和 $\tilde{a}(\zeta)$ 可以分别解析地延拓到复 ζ 的上和下半平面.

当 ζ 是复数时，以上某些公式要作修改. 如 (44.9)、(44.12) 和 (44.14) 分别换成

$$\tilde{\psi}(x,\bar{\zeta})=\sigma_1\overline{\psi(x,\zeta)}, \tag{44.37}$$

$$\tilde{\phi}(x,\bar{\zeta})=\sigma_1\overline{\phi(x,\zeta)} \tag{44.38}$$

和

$$\tilde{a}(\bar{\zeta})=\overline{a(\zeta)}. \tag{44.39}$$

$b(\zeta)$ 和 $\tilde{b}(\zeta)$ 一般不能解析地延拓到 ζ 的实轴之外.

§ 45 约化变换和渐近行为

由于 ζ 的两个值对应于同一个 λ, 所以要讨论约斯特解的约化变换下的性质. 这里，**约化变换** 指的是下列变换

$$\zeta\to\rho^2\zeta^{-1}. \tag{45.1}$$

它导致

$$\lambda \to \lambda, \quad \kappa \to -\kappa. \tag{45.2}$$

即

$$\lambda(\rho^2\zeta^{-1}) = \lambda(\zeta), \quad \kappa(\rho^2\zeta^{-1}) = -\kappa(\zeta). \tag{45.3}$$

由于拉克斯对中只含有 λ, 所以在约化变换下保持不变. 由 (43.7), 有

$$L(\rho^2\zeta^{-1}) = L(\zeta). \tag{45.4}$$

由 (43.20) 可见,

$$E(x, \rho^2\zeta^{-1}) = \rho^{-1}\zeta E(x,\zeta)\sigma_2, \tag{45.5}$$

即

$$\begin{aligned} E_{\cdot 1}(x, \rho^2\zeta^{-1}) &= i\rho^{-1}\zeta E_{\cdot 2}(x,\zeta), \\ E_{\cdot 2}(x, \rho^2\zeta^{-1}) &= -i\rho^{-1}\zeta E_{\cdot 1}(x,\zeta). \end{aligned} \tag{45.6}$$

因而就有

$$\Psi(x, \rho^2\zeta^{-1}) = \rho^{-1}\zeta \Psi(x,\zeta)\sigma_2, \tag{45.7}$$

即

$$\tilde{\psi}(x, \rho^2\zeta^{-1}) = i\rho^{-1}\zeta\psi(x,\zeta), \quad \psi(x, \rho^2\zeta^{-1}) = -i\rho^{-1}\zeta\tilde{\psi}(x,\zeta). \tag{45.8}$$

注意 $E_-(x,\zeta)$ 还包括另一个因子 $Q(\alpha)$, 但是, 此因子不影响如上的变换, 所以仍有

$$\Phi(x, \rho^2\zeta^{-1}) = \rho^{-1}\zeta \Phi(x,\zeta)\sigma_2, \tag{45.9}$$

即

$$\phi(x, \rho^2\zeta^{-1}) = i\rho^{-1}\zeta\tilde{\phi}(x,\zeta), \quad \tilde{\phi}(x, \rho^2\zeta^{-1}) = -i\rho^{-1}\zeta\phi(x,\zeta). \tag{45.10}$$

由此又得到

$$\tilde{a}(\rho^2\zeta^{-1}) = a(\zeta) \tag{45.11}$$

和

$$\tilde{b}(\rho^2\zeta^{-1}) = -b(\zeta), \quad \zeta \text{ 为实数}. \tag{45.12}$$

在约斯特解的解析区域中，当 $|\zeta| \to \infty$ 时，我们有

$$\tilde{\psi}(x,\zeta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\kappa x} + O\left(|\zeta|^{-1}\right), \tag{45.13}$$

$$\psi(x,\zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\kappa x} + O\left(|\zeta|^{-1}\right), \tag{45.14}$$

$$\phi(x,\zeta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{1}{2}\alpha} e^{-i\kappa x} + O\left(|\zeta|^{-1}\right) \tag{45.15}$$

和

$$\tilde{\phi}(x,\zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}\alpha} e^{i\kappa x} + O\left(|\zeta|^{-1}\right). \tag{45.16}$$

当 $|\zeta| \to 0$ 时的渐近行为可以由 (45.9) 至 (45.12) 简单得到，

$$-i\rho^{-1}\zeta\tilde{\psi}(x,\zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\kappa x} + O(|\zeta|), \tag{45.17}$$

$$i\rho^{-1}\zeta\psi(x,\zeta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\kappa x} + O(|\zeta|), \tag{45.18}$$

$$-i\rho^{-1}\zeta\phi(x,\zeta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}\alpha} e^{i\kappa x} + O(|\zeta|) \tag{45.19}$$

和

$$i\rho^{-1}\zeta\tilde{\phi}(x,\zeta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{1}{2}\alpha} e^{-i\kappa x} + O(|\zeta|). \tag{45.20}$$

所以，又得到

$$a(\zeta) = e^{i\frac{1}{2}\alpha} + O\left(|\zeta|^{-1}\right). \qquad |\zeta| \to \infty \tag{45.21}$$

和

$$a(\zeta) = e^{-i\frac{1}{2}\alpha} + O(|\zeta|), \qquad |\zeta| \to 0. \tag{45.22}$$

$a(\zeta)$ 在复 ζ 的上半平面解析，但可以有零点．设 ζ_n 是它的一个零点，

$$a(\zeta_n) = 0. \tag{45.23}$$

由于 (43.5) 可以写成一个本征值方程

$$\hat{L}\,\Phi(\zeta) = \lambda\Phi(\zeta), \tag{45.24}$$

这里

$$\hat{L} = i\sigma_3\partial_x - i\sigma_3 U. \tag{45.25}$$

它显然是一个自共轭算子．自共轭算子的本征值为实数．分离的本征值 λ_n 是实数，由 §44 的对应关系可见，相应的 ζ_n 必在复 ζ 的上半平面的 ρ- 圆的上半圆弧上．我们写下

$$\zeta_n = \rho\, e^{i\beta_n}, \qquad 0 \leq \beta_n < \pi \tag{45.26}$$

$$\zeta_n = \rho\,(\mu_n + i\nu_n), \qquad \mu_n^2 + \nu_n^2 = 1, \qquad \nu_n > 0 \tag{45.27}$$

和

$$\lambda_n = \rho\,\mu_n, \qquad \kappa_n = i\,\rho\,\nu_n. \tag{45.28}$$

由 (44.27) 和 (45.23), 在 ζ_n 处有

$$\phi(x,\zeta_n) = b_n\psi(x,\zeta_n), \tag{45.29}$$

这里 b_n 独立于 x. 由 (44.39) 可见，$\bar{\zeta}_n$ 是 $\tilde{a}(\zeta)$ 的零点，

$$\tilde{a}(\bar{\zeta}_n) = 0. \tag{45.30}$$

再由 (44.29), 得

$$\tilde{\phi}(x,\bar{\zeta}_n) = \tilde{b}_n\tilde{\psi}(x,\bar{\zeta}_n), \tag{45.31}$$

这里 $\tilde{b}_n$ 独立于 x, 且

$$\tilde{b}_n = \bar{b}_n. \tag{45.32}$$

然而，又有

$$\rho^2\zeta_n^{-1} = \bar{\zeta}_n. \tag{45.33}$$

注意 (45.9) 和 (45.10), 由 (45.29) 得到

$$\tilde{\phi}(x,\bar{\zeta}_n) = -b_n\tilde{\psi}(x,\bar{\zeta}_n). \tag{45.34}$$

所以

$$\tilde{b}_n = -b_n, \qquad \bar{b}_n = -b_n. \tag{45.35}$$

这表示 b_n 是纯虚数.

现在来证明零点 ζ_n 是简单零点,

$$\dot{a}(\zeta_n) \neq 0, \tag{45.36}$$

这里

$$\dot{a}(\zeta_n) \equiv \frac{d}{d\zeta}a(\zeta)\Big|_{\zeta=\zeta_n}. \tag{45.37}$$

由 (43.5)、(44.29) 和 (45.27), 利用 NLS 方程中类似的问题所用的同样手续, 得到

$$\dot{a}(\zeta_n) = -ib_n\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(x,\zeta_n)\psi_2(x,\zeta_n)\,dx. \tag{45.38}$$

注意 (45.8),

$$\psi(x,\zeta_n) = -i\rho\zeta_n^{-1}\tilde{\psi}(x,\bar{\zeta}_n) = -i\rho\zeta_n^{-1}\sigma_1\overline{\psi(x,\zeta_n)}, \tag{45.39}$$

即

$$\psi_1(x,\zeta_n) = -i\rho\zeta_n^{-1}\overline{\psi_2(x,\zeta_n)}. \tag{45.40}$$

我们看到,

$$\dot{a}(\zeta_n) = -b_n\rho\zeta_n^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_2(x,\zeta_n)|^2\,dx, \tag{45.41}$$

所以, 得

$$c_n > 0, \tag{45.42}$$

这里

$$c_n \equiv -\frac{b_n}{\dot{a}(\zeta_n)\zeta_n}. \tag{45.43}$$

注意

$$\dot{a}(\zeta_n) = -\dot{\bar{a}}(\bar{\zeta}_n)\rho^{-2}\bar{\zeta}_n^2, \tag{45.44}$$

容易得到

$$\tilde{c}_n = c_n, \tag{45.45}$$

这里

$$\tilde{c}_n \equiv -\frac{\tilde{b}_n}{\dot{\bar{a}}(\bar{\zeta}_n)\bar{\zeta}_n}. \tag{45.46}$$

设 $a(\zeta)$ 有 N 个零点 $\zeta_n, n = 1,2,\ldots,N$. 因为 $a(\zeta)e^{-i\frac{1}{2}\alpha}$ 在 $|\zeta| \to \infty$ 时趋于 1, 通常的手续导致

$$a(\zeta) = e^{i\frac{1}{2}\alpha}\prod_{n=1}^{N}\frac{\zeta-\zeta_n}{\zeta-\bar{\zeta}_n}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|a(\zeta')|^2}{\zeta'-\zeta}\right\}d\zeta'. \tag{45.47}$$

在极限 $|\zeta| \to 0$ 时，我们得到

$$e^{-i\alpha} = \prod_{n=1}^{N}\frac{\zeta_n}{\bar{\zeta}_n}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|a(\zeta')|^2}{\zeta'}\right\}d\zeta'. \tag{45.48}$$

§ 46 萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程

定义

$$\Theta(x,\zeta) = \begin{cases} a(\zeta)^{-1}\phi(x,\zeta), & \text{当} \operatorname{Im}\zeta > 0 \text{ 时}; \\ \tilde{\psi}(x,\zeta), & \text{当} \operatorname{Im}\zeta < 0 \text{ 时}. \end{cases} \tag{46.1}$$

$a(\zeta)^{-1}\phi(x,\zeta)$ 在 ζ 的上半平面，除了在 ζ_n 有简单极点外，处处解析. $\tilde{\psi}(x,\zeta)$ 在下半平面解析. $\Theta(x,\zeta)$ 在实轴处有跃度

$$a(\zeta)^{-1}\phi(x,\zeta) - \tilde{\psi}(x,\zeta) = r(\zeta)\psi(x,\zeta), \tag{46.2}$$

这里

$$r(\zeta) = \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)}. \tag{46.3}$$

在上和下半平面， $\Theta(x,\zeta)$ 有极限

$$\{\Theta(x,\zeta) - E_{\cdot 1}(x,\zeta)\}\, e^{i\kappa x} = O(|\zeta|^{-1}) \qquad \text{当 } |\zeta| \to \infty \text{ 时} \tag{46.4}$$

和

$$\{\Theta(x,\zeta) - E_{\cdot 1}(x,\zeta)\}\, e^{i\kappa x} = O(1). \qquad \text{当 } |\zeta| \to 0 \text{ 时} \tag{46.5}$$

应用柯西公式，得

$$\begin{aligned}&\{\Theta(x,\zeta) - E_{\cdot 1}(x,\zeta)\}\, e^{i\kappa x} \\ &= \frac{1}{i2\pi} \oint \frac{\{\Theta(x,\zeta') - E_{\cdot 1}(x,\zeta')\}\, e^{i\kappa' x}}{\zeta' - \zeta}\, d\zeta',\end{aligned} \tag{46.6}$$

积分路径的组成是：上下平面沿实轴和无穷远处的半圆弧组成的两个反时针回路，和绕每一个 ζ_n 的顺时针的小圆 r_n. 也就是如图 5-1(见第 1 章，第 14 页), 不过这里的小圆的心都在 ρ- 圆的上半圆弧上.

由于 (46.5), 大圆弧的积分可以略去，所以上式的右端化为在各个点 ζ_n 处的留数

$$\frac{1}{i2\pi} \oint_{r_n} \frac{\{\Theta(x,\zeta') - E_{\cdot 1}(x,\zeta')\}\, e^{i\kappa' x}}{\zeta' - \zeta}\, d\zeta' \tag{46.7}$$

之和 $R(x,\zeta)$ 加上连续谱部分 $J(x,\zeta)$,

$$J(x,\zeta) = \frac{1}{i2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\zeta')\psi(x,\zeta')e^{i\kappa' x}}{\zeta' - \zeta}\, d\zeta'. \tag{46.8}$$

这里 r_n 表示绕 $a(\zeta)$ 的零点 ζ_n 的小圆. 绕 r_n 的积分是

$$-\frac{1}{\dot{a}(\zeta_n)} \frac{1}{\zeta_n - \zeta} \phi(x,\zeta_n) e^{i\kappa_n x}. \tag{46.9}$$

注意 (45.29) 和 (45.43), 就得到

$$R(x,\zeta) = -\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\zeta-\zeta_n}c_n\zeta_n\psi(x,\zeta_n)e^{i\kappa_n x}. \tag{46.10}$$

于是, 将 ζ 取在下半平面, 得

$$\tilde{\phi}(x,\zeta) = E_{\cdot 1}(x,\zeta) + \{R(x,\zeta) + J(x,\zeta)\}e^{-i\kappa x}. \tag{46.11}$$

这就是萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程. 由它可以定出 NLS$^+$ 方程在非 0 边界值时的解.

由 (43.24), 有

$$\tilde{\psi}(x,\zeta) = E_{\cdot 1}(x,\zeta) + \int_x^{\infty} K(x,y)E_{\cdot 1}(y,\zeta)\,dy. \tag{46.12}$$

分部积分后, 取 $|\zeta|\to\infty$ 的极限, 得

$$\tilde{\psi}(x,\zeta) = E_{\cdot 1}(x,\zeta) + \frac{1}{i\kappa}K(x,x)E_{\cdot 1}(x,\zeta) + \cdots. \tag{46.13}$$

于是

$$\tilde{\psi}_2(x,\zeta) = i\rho\zeta^{-1}e^{-i\kappa x} - i2\zeta^{-1}K_{21}(x,x)e^{-i\kappa x} + O(|\zeta|^{-2}). \tag{46.14}$$

由 (43.28) 得

$$\begin{aligned}\overline{u(x)} &= \rho - 2K_{21}(x,x)\\ &= \lim_{|\zeta|\to\infty}\{-i\zeta\tilde{\psi}_2(x,\zeta)e^{\kappa x}\}.\end{aligned} \tag{46.15}$$

也就是

$$\begin{aligned}\overline{u(x)} = \rho + i\sum_{n=1}^{N}c_n\zeta_n\psi_2(x,\zeta_n)e^{i\kappa_n x}\\ + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(\zeta')\psi_2(x,\zeta')e^{i\kappa' x}d\zeta'.\end{aligned} \tag{46.16}$$

§ 47 散射数据随时间的演化

在以上的讨论中，时间 t 我们往往略去不写．事实上，应当写上．例如 (44.16)，就应当写作

$$\phi(x,t,\zeta)=a(t,\zeta)\tilde{\psi}(x,t,\zeta)+b(t,\zeta)\psi(x,t,\zeta). \tag{47.1}$$

但是，此 t 仍是一个纯参数，因为上式中的量如何随它变化并未决定．现在利用第二个拉克斯方程来决定．

当 $x\to-\infty$ 时，约斯特解为

$$\phi(x,t,\zeta)\to e^{i\frac{1}{2}\alpha\sigma_3}\begin{pmatrix}1\\ i\rho\zeta^{-1}\end{pmatrix}e^{-i\kappa x}. \tag{47.2}$$

它独立于 t，所以不能满足第二个拉克斯方程．我们引入一个依赖于 t 和 ζ 的函数 $h(t,\zeta)$，使得

$$\{\partial_t-M(x,t,\zeta)\}\,h(t,\zeta)\phi(x,t,\zeta)=0. \tag{47.3}$$

取极限 $x\to-\infty$，得

$$\partial_t\,h(t,\zeta)-i2\kappa\lambda\,h(t,\zeta)=0. \tag{47.4}$$

因此

$$h(t,\zeta)=e^{i2\kappa\lambda t}. \tag{47.5}$$

考虑到时间的相依，约斯特解

$$\phi(x,t,\zeta),\quad \tilde{\phi}(x,t,\zeta),\quad \tilde{\psi}(x,t,\zeta),\quad \psi(x,t,\zeta)$$

分别换成

$$h(t,\zeta)\phi(x,t,\zeta),\qquad h^{-1}(t,\zeta)\tilde{\phi}(x,t,\zeta),$$

$$h(t,\zeta)\tilde{\psi}(x,t,\zeta),\qquad h^{-1}(t,\zeta)\psi(x,t,\zeta).$$

以 $h(t,\zeta)$ 乘 (47.1), 并以算子 $\{\partial_t - M(x,t,\zeta)\}$ 作用, 再取极限 $x\to\infty$, 这时右端成为

$$\left\{\partial_t - i2\lambda^2\sigma_3 + 2\lambda\rho\sigma_1\right\}h(t,\zeta)\left\{a(t,\zeta)E_{\cdot 1}(x,\zeta)\right.$$

$$\left.+\, b(t,\zeta)E_{\cdot 2}(x,\zeta)\right\} = 0. \tag{47.6}$$

注意 (43.20), 即得

$$\partial_t\{h(t,\zeta)a(t,\zeta)\} - i2\kappa\lambda\, h(t,\zeta)a(t,\zeta) = 0 \tag{47.7}$$

和

$$\partial_t\{h(t,\zeta)b(t,\zeta)\} + i2\kappa\lambda h(t,\zeta)b(t,\zeta) = 0. \tag{47.8}$$

代入 $h(t,\zeta)$ 的表示式，就得到

$$a(t,\zeta) = a(0,\zeta) = a(\zeta) \tag{47.9}$$

和

$$b(t,\zeta) = b(0,\zeta)e^{-i4\kappa\lambda t}. \tag{47.10}$$

又有

$$r(t,\zeta) = r(0,\zeta)e^{-i4\kappa\lambda t}. \tag{47.11}$$

类似地， (45.29) 应写作

$$\phi(x,t,\zeta_n) = b_n(t)\psi(x,t,\zeta_n). \tag{47.12}$$

乘以 $h(t,\zeta_n)$, 并以算子 $\{\partial_t - M(x,t,\zeta_n)\}$ 作用，再取极限 $x\to\infty$, 得

$$\left\{\partial_t - i2\lambda_n^2\sigma_3 + 2\lambda_n\rho\sigma_1\right\} h(t,\zeta_n)b_n(t)E_{\cdot 2}(x,\zeta_n) = 0, \tag{47.13}$$

即

$$b_{nt}(t) + i4\kappa_n\lambda_n\, b_n(t) = 0. \tag{47.14}$$

所以

$$b_n(t) = b_n(0)e^{-i4\kappa_n\lambda_n t}. \tag{47.15}$$

于是得到

$$c_n(t) = c_n(0)e^{-i4\kappa\lambda_n t}. \tag{47.16}$$

我们看到，只要将反散射方程中所含的量，即散射数据

$$S = \{r(\zeta),\, c_n,\, \zeta_n\} \tag{47.17}$$

换成

$$S(t) = \{r(0,\zeta)e^{-i4\kappa\lambda t},\, c_n(0)e^{-i4\kappa_n\lambda_n t},\, \zeta_n\}, \tag{47.18}$$

这样就得到含时间的结果.

§ 48　暗的 1- 孤子解

作为第一个实例，现在来看无反射 $r(\lambda) = 0$ 且 $N = 1$ 的情况. 我们不但可以求出 NLS$^+$ 方程的解，暗的 1- 孤子解，而且可以求出此时的约斯特解. 这时 (46.13) 为

$$\tilde{\psi}(x,\zeta) = E_{\cdot 1}(x,\zeta) - \frac{1}{\zeta - \zeta_1}c_1\zeta_1\psi(x,\zeta_1)e^{i\kappa_1 x}e^{-i\kappa x}, \tag{48.1}$$

即

$$\tilde{\psi}_1(x,\zeta) = e^{-i\kappa x} - \frac{1}{\zeta - \zeta_1}c_1\zeta_1\psi_1(x,\zeta_1)e^{i\kappa_1 x}e^{-i\kappa x}, \tag{48.2}$$

$$\tilde{\psi}_2(x,\zeta) = i\rho\zeta^{-1}e^{-i\kappa x} - \frac{1}{\zeta - \zeta_1}c_1\zeta_1\psi_2(x,\zeta_1)e^{i\kappa_1 x}e^{-i\kappa x}. \tag{48.3}$$

利用关系 (45.8), 取 $\zeta = \rho^2\zeta_1^{-1} = \bar{\zeta}_1$, 得

$$\tilde{\psi}(x,\bar{\zeta}_1) = \tilde{\psi}(x,\rho^2\zeta_1^{-1}) = i\rho^{-1}\zeta_1\psi(x,\zeta_1). \tag{48.4}$$

所以 (48.3) 成为

$$i\rho^{-1}\zeta_1\psi_2(x,\zeta_1) = i\rho^{-1}\zeta_1 e^{i\kappa_1 x} - \frac{1}{\bar{\zeta}_1 - \zeta_1}c_1\zeta_1\psi_2(x,\zeta_1)e^{i2\kappa_1 x}. \tag{48.5}$$

于是立即得到

$$\psi_2(x,\zeta_1)=e^{i\kappa_1 x}\left\{1-\frac{i\rho}{\bar{\zeta}_1-\zeta_1}c_1e^{i2\kappa_1 x}\right\}^{-1} \tag{48.6}$$

代入 (46.18), 即代入

$$\overline{u_1(x)}=\rho+ic_1\zeta_1\psi_2(x,\zeta_1)e^{i\kappa_1 x} \tag{48.7}$$

后，得到

$$\begin{aligned}\overline{u_1(x)}&=\rho+ic_1\zeta_1e^{i2\kappa_1 x}\left\{1-\frac{i\rho}{\bar{\zeta}_1-\zeta_1}c_1e^{i2\kappa_1 x}\right\}^{-1}\\&=\rho\left\{1-\frac{i\rho}{\bar{\zeta}_1-\zeta_1}c_1e^{i2\kappa_1 x}\right\}^{-1}\left\{1-\frac{\zeta_1^2}{\rho^2}\frac{i\rho}{\bar{\zeta}_1-\zeta_1}c_1e^{i2\kappa_1 x}\right\}.\end{aligned} \tag{48.8}$$

引入

$$F_1=-\frac{i\rho}{\bar{\zeta}_1-\zeta_1}c_1e^{i2\kappa_1 x}, \tag{48.9}$$

上式化为

$$\overline{u_1(x)}=\rho\frac{1+e^{i2\beta_1}F_1}{1+F_1}. \tag{48.10}$$

注意 (48.9) 右端指数前的因子恒为正，和 c_1 对时间的相依 (47.15), 于是 (48.9) 可以写作

$$F_1=e^{-2\theta_1}, \tag{48.11}$$

式中

$$\theta_1=-i\kappa_1(x-x_1-2\lambda_1 t)=k_1(x-x_1-2\lambda_1 t). \tag{48.12}$$

这里 κ_1 为纯虚数，它的虚部 $k_1>0$. 代入 (48.10), 得

$$u_1(x)=\rho\frac{1+e^{-i2\beta_1}e^{-2k_1(x-x_1-2\lambda_1 t)}}{1+e^{-2k_1(x-x_1-2\lambda_1 t)}}. \tag{48.13}$$

这就是 NLS$^+$ 方程的暗的 1- 孤子解. 容易看出,

$$u_1 \to \begin{cases} \rho, & \text{当 } x \to \infty \text{ 时;} \\ \rho e^{-i2\beta_1}, & \text{当 } x \to -\infty \text{ 时.} \end{cases} \tag{48.14}$$

(48.13) 又可写作

$$u_1(x) = e^{-i\beta_1}\frac{\zeta_1 + \bar{\zeta}_1 e^{-2\theta_1}}{1 + e^{-2\theta_1}} = e^{-i\beta_1}\{\lambda_1 + ik_1 \text{th}\,\theta_1\}. \tag{48.15}$$

得到

$$|u_1(x)|^2 = \lambda_1^2 + k_1^2 \,\text{th}^2\,\theta_1 = \rho^2 - k_1^2 \,\text{sech}^2\,\theta_1. \tag{48.16}$$

所以我们看到解的模 $|u_1(x)|$, 只在 $\theta_1 \approx 0$ 处, 取最小值 $|\lambda_1|$, 其余各处都取值 ρ. 注意双曲正割显著不为 0 的范围很小, 所以 $|u_1(x)|$ 几乎处处为常数值 ρ, 只在一个很小的范围下凹, 值减到 λ_1. 所以, 这种解称为 **暗孤子解**. 对前面的孤子解有时称为 **亮孤子解**.

把 (48.7) 代回 (48.3), 得

$$\tilde{\psi}_2(x,\zeta) = i\rho\zeta^{-1}e^{-i\kappa x} + i\frac{1}{\zeta - \zeta_1}\{\overline{u_1(x)} - \rho\}e^{-i\kappa x} \tag{48.16}$$

和

$$\psi_1(x,\zeta) = -i\rho\zeta^{-1}e^{i\kappa x} - i\frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_1}\{u_1(x) - \rho\}e^{i\kappa x}. \tag{48.17}$$

利用 (48.4) 得

$$\tilde{\psi}_1(x,\zeta) = e^{-i\kappa x} - \frac{1}{\zeta - \zeta_1}\frac{\zeta_1}{\rho}\{u_1(x) - \rho\}e^{-i\kappa x} \tag{48.18}$$

和

$$\psi_2(x,\zeta) = e^{i\kappa x} - \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_1}\frac{\bar{\zeta}_1}{\rho}\{\overline{u_1(x)} - \rho\}e^{i\kappa x}. \tag{48.19}$$

这时，因为无反射，且 $N=1$, 所以

$$a(\zeta)=e^{-i\beta_1}\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-\bar{\zeta}_1}. \tag{48.20}$$

由

$$\phi(x,\zeta)=a(\zeta)\tilde{\psi}(x,\zeta), \tag{48.21}$$

就可得到这时的 $\phi(x,\zeta)$ 的显式.

§ 49 暗的 N- 孤子解

在无反散射时， $r(\zeta)=0$, 这时 (46.13) 为

$$\tilde{\psi}(x,\zeta)=E_{\cdot 1}(x,\zeta)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\zeta-\zeta_n}c_n\zeta_n\psi(x,\zeta_n)e^{i\kappa_n x}e^{-i\kappa x}, \tag{49.1}$$

即

$$\tilde{\psi}_1(x,\zeta)=e^{-i\kappa x}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\zeta-\zeta_n}c_n\zeta_n\psi_1(x,\zeta_n)e^{i\kappa_n x}e^{-i\kappa x} \tag{49.2}$$

和

$$\tilde{\psi}_2(x,\zeta)=i\rho\zeta^{-1}e^{-i\kappa x}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\zeta-\zeta_n}c_n\zeta_n\psi_2(x,\zeta_n)e^{i\kappa_n x}e^{-i\kappa x}. \tag{49.3}$$

(46.18) 这时为

$$\overline{u_N(x)}=\rho+\sum_{n=1}^{N}ic_n\zeta_n\psi_2(x,\zeta_n)e^{i\kappa_n x}. \tag{49.4}$$

利用关系 (45.8), 取 $\zeta=\rho^2\zeta_m^{-1}=\bar{\zeta}_m$, 得

$$\tilde{\psi}(x,\bar{\zeta}_m)=\tilde{\psi}(x,\rho^2\zeta_m^{-1})=i\rho^{-1}\zeta_m\psi(x,\zeta_m). \tag{49.5}$$

所以 (49.3) 成为

$$i\rho^{-1}\zeta_m\psi_2(x,\zeta_m) = i\rho^{-1}\zeta_m e^{i\kappa_m x}$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\bar{\zeta}_m-\zeta_n}c_n\zeta_n\psi_2(x,\zeta_n)e^{i(\kappa_n+\kappa_m)x}. \quad (49.6)$$

引入

$$\Psi_{2n} = i\sqrt{c_n}\rho^{-1}\zeta_n\psi_2(x,\zeta_n), \quad (49.7)$$

$$f_n = \sqrt{c_n}e^{i\kappa_n x}, \quad (49.8)$$

$$g_n = i\rho^{-1}\zeta_n f_n \quad (49.9)$$

和

$$B_{nm} = f_n\frac{\rho}{i(\bar{\zeta}_m-\zeta_n)}f_m, \quad (49.10)$$

(49.3) 可以写作

$$\Psi_{2m} = g_m - \sum_{n=1}^{N}\Psi_{2n}B_{nm}, \quad (49.11)$$

或矩阵形式

$$\Psi_2 = g - \Psi_2 B. \quad (49.12)$$

由此得

$$\Psi_2 = g(I+B)^{-1}. \quad (49.13)$$

(49.4) 可以写作

$$\overline{u_N(x,t)} = \rho + \rho\sum_{n=1}^{N}\Psi_{2n}f_n = \rho\left\{1+\Psi_2 f^T\right\}. \quad (49.14)$$

把 (49.13) 代入，得

$$\Psi_2 f^T = g(I+B)^{-1}f^T = \frac{\det(I+B+f^T g)}{\det(I+B)} - 1. \quad (49.15)$$

因此，(49.14) 成为

$$\overline{u_N(x,t)} = \rho \frac{\det(I+B')}{\det(I+B)}, \tag{49.16}$$

这里

$$B' = B + f^T g, \tag{49.17}$$

即

$$\begin{aligned} B'_{nm} &= B_{nm} + f_n g_m \\ &= f_n \tfrac{1}{i(\zeta_m - \zeta_n)} \rho^{-1} \zeta_n \zeta_m f_m. \end{aligned} \tag{49.18}$$

容易得到

$$\det(I+B) = 1 + \sum_{r=1}^{N} \sum_{1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_r \le N} B(n_1, n_2, ..., n_r), \tag{49.19}$$

式中

$$\begin{aligned} B(n_1, n_2, ..., n_r) = \prod_{n,m} f_n^2 [i(\bar{\zeta}_m - \zeta_n)]^{-1} \\ \cdot \prod_{n<m} [i(\bar{\zeta}_m - \bar{\zeta}_n)][i(\zeta_m - \zeta_n)]\, \rho^r. \end{aligned} \tag{49.20}$$

这里

$$n,\ m \in \{n_1, n_2, ..., n_r\}. \tag{49.21}$$

(49.20) 又可以写作

$$B(n_1, n_2, ..., n_r) = \prod_n F_n \prod_{n<m} \left| \frac{\zeta_n - \zeta_m}{\bar{\zeta}_n - \zeta_m} \right|^2, \tag{49.22}$$

式中

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\rho}{i(\bar{\zeta}_n - \zeta_m)} f_n^2 \\ &= \frac{\rho}{i(\bar{\zeta}_m - \zeta_n)} c_n e^{i2\kappa_n x}. \end{aligned} \tag{49.23}$$

注意右端指数前的因子恒为正，和 c_n 对时间的相依关系 (47.15), 于是上式可以表为

$$F_n = e^{-2\theta_n}, \tag{49.24}$$

这里

$$\theta_n = -i\kappa_n(x - x_n - 2\lambda_n t) = k_n(x - x_n - 2\lambda_n t). \tag{49.25}$$

因为 κ_n 是纯虚数， k_n 是它的虚部.

同样容易得到

$$\det(I + B') = 1 + \sum_{r=1}^{N} \sum_{1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_r \le N} B'(n_1, n_2, ..., n_r), \tag{49.26}$$

式中

$$B'(n_1, n_2, ..., n_r) = \prod_n F_n \rho^{-2} \zeta_n^2 \prod_{n<m} \left| \frac{\zeta_n - \zeta_m}{\bar{\zeta}_n - \zeta_m} \right|^2. \tag{49.27}$$

注意下列代换

$$\rho^{-2}\zeta_n^2 = e^{i2\beta_n}. \tag{49.28}$$

于是，我们就得到了 NLS$^+$ 方程的暗的 N- 孤子解的显式.

例如，当 $N = 2$ 时，我们不难算出最终结果.

$$\det(I + B) = 1 + F_1 + F_2 + F_1 F_2 \left| \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\bar{\zeta}_1 - \zeta_2} \right|^2, \tag{49.29}$$

即

$$1 + e^{-2\theta_1} + e^{-2\theta_2} + e^{-2(\theta_1+\theta_2)} \left(\frac{1 - \lambda_1\lambda_2 - k_1 k_2}{1 - \lambda_1\lambda_2 + k_1 k_2} \right) \tag{49.30}$$

和

$$\det(I + B') = 1 + e^{i2\beta_1} F_1 + e^{i2\beta_2} F_2 + e^{i2(\beta_1+\beta_2)} F_1 F_2 \left| \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\bar{\zeta}_1 - \zeta_2} \right|^2, \tag{49.31}$$

即

$$1+e^{i2\beta_1-2\theta_1}+e^{i2\beta_2-2\theta_2}+e^{i2(\beta_1+\beta_2)-2(\theta_1+\theta_2)}\left(\frac{1-\lambda_1\lambda_2-k_1k_2}{1-\lambda_1\lambda_2+k_1k_2}\right). \tag{49.32}$$

代入 $N=2$ 的 (49.16), 就得到 $u_2(x,t)$.

§ 50 暗的 N- 孤子解的渐近行为

因为 $\operatorname{Im} k_n>0$, 所以有

$$F_n\to\begin{cases}0, & \text{当 } x\to+\infty \text{ 时;}\\ \infty, & \text{当 } x\to-\infty \text{ 时.}\end{cases} \tag{50.1}$$

于是，当 $x\to+\infty$ 时，有

$$\det(I+B),\ \det(I+B')\to 1. \tag{50.2}$$

这就满足边界条件之一. 当 $x\to-\infty$ 时，有

$$\frac{\det(I+B')}{\det(I+B)}\to\frac{B'(1,2,...,N)}{B(1,2,...,N)}=\prod_{n=1}^{N}e^{-i2\beta_n}. \tag{50.3}$$

与 (43.4) 比较，得

$$\alpha=-2\prod_{n=1}^{N}\beta_n. \tag{50.4}$$

这正是无反射情况下的 (45.48).

以 Ω_n 表示 $x=x_n+2\lambda_n t$ 的邻域，设

$$\lambda_N<\lambda_{N-1}<\cdots<\lambda_1, \tag{50.5}$$

则当 $x\to\infty$ 时，这些邻域一一分开，从左到右如

$$\Omega_N,\ \Omega_{N-1},\quad ...,\quad \Omega_1. \tag{50.6}$$

因此，在邻域 Ω_j 中，有

$$x - x_n - 2\lambda_n t \to -\infty, \quad F_n \to \infty, \qquad \text{当}\ n < j\ \text{时},$$

$$x - x_m - 2\lambda_n t \to \infty, \quad F_m \to 0, \qquad \text{当}\ m > j\ \text{时}. \tag{50.7}$$

保留最高阶项，得

$$\det(I + B) \approx B(1, 2, ..., j-1) + B(1, 2, ..., j). \tag{50.8}$$

容易看出

$$\det(I + B) \approx B(1, 2, ..., j-1)(1 + F_j^{(+)}), \tag{50.10}$$

式中

$$F_j^{(+)} = F_j \prod_{n=1}^{j-1} \left| \frac{\zeta_j - \zeta_n}{\bar{\zeta}_j - \zeta_n} \right|^2. \tag{50.11}$$

也可以写作

$$F_j^{(+)} = e^{-2\theta_j^{(+)}}, \tag{50.12}$$

式中

$$\theta_j^{(+)} = k_j \left(x - x_j - 2\lambda_j t - \Delta_j^{(+)} \right). \tag{50.13}$$

和

$$\Delta_j^{(+)} = \frac{1}{2k_j} \prod_{n=1}^{j-1} \ln \left| \frac{\zeta_j - \zeta_n}{\bar{\zeta}_j - \zeta_n} \right|^2. \tag{50.14}$$

类似地，在邻域 Ω_j 中，又有

$$\det(I + B') \approx B'(1, 2, ..., j-1) + B'(1, 2, ..., j), \tag{50.15}$$

即

$$\det(I + B') \approx B'(1, 2, ..., j-1) \left(1 + e^{-i2\beta_j} F_j^{(+)} \right). \tag{50.16}$$

因此，当 $t\to\infty$ 时，在 Ω_j 中，$u_N(x)$ 近似等于

$$u_N \approx e^{-i2(\beta_1+\cdots+\beta_{j-1})}u_1^{(+)}(x,\zeta_j), \tag{50.17}$$

这里 $u_1(x,\zeta_j)$ 表示参数为 ζ_j 的暗的单孤子解.

因此，当 $t\to\infty$ 时，$u_N(x)$ 可以表成一系列暗的单孤子解之和：

$$\begin{aligned} u_N(x) &= e^{-i2(\beta_1+\cdots+\beta_{N-1})}\left\{u_1^{(+)}(x,\zeta_N)-\rho\right\}+\cdots \\ &\quad + e^{-i2(\beta_1+\cdots+\beta_{j-1})}\left\{u_1^{(+)}(x,\zeta_j)-\rho\right\}+\cdots+u_1^{(+)}(x,\zeta_1). \end{aligned} \tag{50.18}$$

这里我们注意，上式中有 $N-1$ 个括号中减去了 ρ, 因为

$$u_1^{(+)}(x,\zeta_k)\to\begin{cases} \rho, & \text{当 } x \text{ 在 } \Omega_j \text{ 之右方远处;} \\ \rho\, e^{-i2\beta_k}, & \text{当 } x \text{ 在 } \Omega_j \text{ 之左方远处.} \end{cases} \tag{50.19}$$

类似地，当 $t\to-\infty$ 时，在 Ω_j 中，$u_N(x)$ 近似等于

$$u_N \approx e^{-i2(\beta_{j+1}+\cdots+\beta_N)}u_1^{(-)}(x,\zeta_j), \tag{50.20}$$

这里

$$F_j^{(-)} = F_j \prod_{m=j+1}^{N}\left|\frac{\zeta_j-\zeta_m}{\bar\zeta_j-\zeta_m}\right|^2, \tag{50.21}$$

$$F_j^{(-)} = e^{-2\theta_j^{(-)}}, \tag{50.22}$$

$$\theta_j^{(-)} = k_j\left(x-x_j-2\lambda_j t-\Delta_j^{(-)}\right) \tag{50.23}$$

和

$$\Delta_j^{(-)} = \frac{1}{2k_j}\prod_{m=j+1}^{N}\ln\left|\frac{\zeta_j-\zeta_m}{\bar\zeta_j-\zeta_m}\right|^2. \tag{50.24}$$

因此，当 $t\to-\infty$ 时，$u_N(x)$ 可以表成一系列暗的单孤子解之和：

$$u_N(x)=e^{-i2(\beta_2+\cdots+\beta_N)}\left\{u_1^{(-)}(x,\zeta_1)-\rho\right\}+\cdots$$

$$+e^{-i2(\beta_{j+1}+\cdots+\beta_N)}\left\{u_1^{(-)}(x,\zeta_j)-\rho\right\}+\cdots+u_1^{(-)}(x,\zeta_N). \quad (50.25)$$

这样我们看到，在 $t\to-\infty$ 到 $t\to\infty$ 的过程中，第 j 个暗孤子的总的附加移动为

$$\Delta_j=\Delta_j^{(+)}-\Delta_j^{(-)}. \quad (50.26)$$

§ 51 马尔钦柯方程

从求解看，萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程是合适和足够的．但是，与它等价的马尔钦柯方程还适用于别的目的，例如导出约斯特解的完备性等．当 ζ 为实数时，利用变换 $\zeta\to-\rho^2\zeta^{-1}$，可以证明

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-i\kappa x}\,d\zeta=\int_{0}^{\infty}\rho^2\zeta^{-2}e^{-i\kappa x}\,d\zeta. \quad (51.1)$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\kappa x}\,d\zeta=\int_{0}^{\infty}(1+\rho^2\zeta^{-2})e^{-i\kappa x}\,d\zeta$$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\kappa x}d\kappa=4\pi\delta(x) \quad (51.2)$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty}\zeta^{-1}e^{-i\kappa x}\,d\zeta=0. \quad (51.3)$$

当 $x<0$ 时，有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\zeta-\zeta'}e^{-i\kappa x}\,d\zeta=\begin{cases}2\pi ie^{-i\kappa' x}, & \text{当}\, x<0,\quad \operatorname{Im}\zeta'>0\,\text{时};\\ -2\pi ie^{-i\kappa' x}, & \text{当}\, x>0,\quad \operatorname{Im}\zeta'<0\,\text{时},\end{cases}\tag{51.4}$$

这样立即看到

$$\int_{-\infty}^{\infty}E_{\cdot 1}(x,\zeta)E_{\cdot 2}(y,\zeta)^T\sigma_1\,d\zeta=4\pi\delta(x-y),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}E_{\cdot 2}(x,\zeta)E_{\cdot 1}(y,\zeta)^T\sigma_1\,d\zeta=4\pi\delta(x-y).\tag{51.5}$$

写下萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程

$$\tilde{\psi}(x,\zeta)-E_{\cdot 1}(x,\zeta)=\{R(x,\zeta)+J(x,\zeta)\}\,e^{-i\kappa x},\tag{51.6}$$

这里 ζ 应理解作 $\zeta-i0$, 和积分表示 (43.24)

$$\tilde{\psi}(x,\zeta)=E_{\cdot 1}(x,\zeta)+\int_x^{\infty}K(x,y)E_{\cdot 1}(y,\zeta)\,dy\tag{51.7}$$

和

$$\psi(x,\zeta)=E_{\cdot 2}(x,\zeta)+\int_x^{\infty}K(x,y)E_{\cdot 2}(y,\zeta)\,dy.\tag{51.8}$$

将 (51.6) 右乘以 $(4\pi)^{-1}E_{\cdot 2}(y,\zeta)\sigma_1$ 后，在 $y>x$ 时，对 ζ 从 $-\infty$ 到 ∞ 积分，利用 (51.5), 左端为 $K(x,y)$. 将 (46.10) 和 (46.8) 代入，利用 (51.4), 右端为

$$-\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{N}c_n\zeta_n\psi(x,\zeta_n)E_{\cdot 2}(y,\zeta_n)^T\sigma_1$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(\zeta)\psi(x,\zeta)E_{\cdot 2}(y,\zeta)^T\sigma_1\,d\zeta.\tag{51.9}$$

将上列积分表示代入，最后得到

$$K(x,y)+F(x+y)+\int_x^\infty K(x,z)F(z+y)\,dz=0,\qquad y>x,\ (51.10)$$

式中

$$F(x+y)=\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{N}c_n\zeta_nE_{\cdot 2}(x,\zeta_n)E_{\cdot 2}(y,\zeta_n)^T\sigma_1$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(\zeta')E_{\cdot 2}(x,\zeta')E_{\cdot 2}(y,\zeta')^T\sigma_1 d\zeta'.\qquad(51.11)$$

也就是

$$F(x+y)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}c_n\begin{pmatrix}\rho\\ i\zeta_n\end{pmatrix}(1\quad -i\rho\zeta_n^{-1})e^{i\kappa_n(x+y)}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\zeta')}{i\zeta'}\begin{pmatrix}\rho\\ i\zeta'\end{pmatrix}(1\quad -i\rho\zeta'^{-1})e^{i\kappa'(x+y)}d\zeta'.\quad(51.12)$$

(51.10) 就是 NLS$^+$ 方程在非 0 边值时的马尔钦柯方程.

我们可以直接证明反散射方程的两种形式是等价的. 由马尔钦柯方程的形式，设

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^{N}K(x,\zeta_n)(1\quad -i\rho\zeta_n^{-1})e^{i\kappa_n y}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}K(x,\zeta)(1\quad -i\rho\zeta^{-1})e^{i\kappa y}d\zeta.\qquad(51.13)$$

这里 $K(x,\zeta_n)$ 和 $K(x,\zeta)$ 是 2×1 矩阵. 代入 (51.10), 积分后各项出现一个分母. 注意

$$\kappa_n+\kappa_m=\frac{1}{2}(\zeta_n-\rho^2\zeta_m^{-1})(1+\zeta_n^{-1}\zeta_m)\qquad(51.14)$$

等关系，得到

$$K(x,\zeta_m) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \rho \\ i\zeta_m \end{pmatrix} c_m e^{i\kappa_m x}$$
$$+\sum_{n=1}^{N} K(x,\zeta_n)\frac{\rho}{i(\zeta_n - \rho^2\zeta_m^{-1})} c_m e^{i(\kappa_n+\kappa_m)x}$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty} K(x,\zeta')\frac{\rho}{i(\zeta' - \rho^2\zeta_m^{-1})} c_m e^{i(\kappa'+\kappa_m)x}\, d\zeta', \qquad (51.15)$$

和

$$K(x,\zeta) = -\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} \rho \\ i\zeta \end{pmatrix} \frac{r(\zeta)}{i\zeta} e^{i\kappa x}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{N} K(x,\zeta_n)\frac{\rho}{i(\zeta_n - \rho^2\zeta^{-1})}\frac{r(\zeta)}{i\zeta} e^{i(\kappa_n+\kappa)x}$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty} K(x,\zeta')\frac{\rho}{i(\zeta' - \rho^2\zeta^{-1})}\frac{r(\zeta)}{i\zeta} e^{i(\kappa'+\kappa)x}\, d\zeta'. \qquad (51.16)$$

与萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程对比，即见

$$K(x,\zeta_m) = -\frac{1}{2} c_m \zeta_m \psi(x,\zeta_m) \qquad (51.17)$$

和

$$K(x,\zeta) = -\frac{1}{4\pi} r(\zeta)\psi(x,\zeta). \qquad (51.18)$$

§ 52 约斯特解的正交性

和边值为 0 时一样，用狄喇克记号定义约斯特解的内积，

$$\langle\phi(\zeta')|\phi(\zeta)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\zeta')^A \phi(x,\zeta)\, dx. \qquad (52.1)$$

这里，伴随态为如下列阵：

$$\phi(x,\zeta)^A = \psi(x,\zeta)^T\sigma_1. \tag{52.2}$$

由第一个拉克斯方程，容易得到

$$\frac{d}{dx}W\big[\phi(x,\zeta),\psi(x,\zeta')\big] = -i(\lambda-\lambda')\big\{\phi_1(x,\zeta)\psi_2(x,\zeta') + \phi_2(x,\zeta)\psi_1(x,\zeta')\big\}. \tag{52.3}$$

于是，(52.1) 成为

$$\langle\phi(\zeta')|\phi(\zeta)\rangle = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{-i(\lambda-\lambda')}W\big[\phi(x,\zeta),\psi(x,\zeta')\big]\Big|_{-L}^{L}. \tag{52.4}$$

在上限处，W 为

$$a(\zeta)(1-\rho^2\zeta^{-1}\zeta'^{-1})e^{-i(\kappa-\kappa')L} + b(\zeta)(\rho\zeta'^{-1}-\rho\zeta^{-1})e^{i(\kappa+\kappa')L}. \tag{52.5}$$

这里 ζ 和 ζ' 理解为由上半平面趋于实轴. 极限为主值意义下的，

$$\lim_{L\to\infty} P\frac{1}{-i(\lambda-\lambda)}e^{-i(\kappa-\kappa')L} = 2\pi(1-\rho^2\zeta^{-2})^{-1}\,\delta(\zeta-\zeta'). \tag{52.6}$$

(52.5) 第二项的贡献为 0. 因为它含有一个因子 $\delta(\zeta-\rho^2\zeta'^{-1})$. 由于 ζ 和 ζ' 都是由上半平面趋于实轴，所以 ζ'^{-1} 将由下半平面趋于实轴. 因此，ζ 不可能等于 $\rho^2\zeta'^{-1}$. 这样就得到，(52.4) 在上限处的值是 $2\pi\, a(\zeta)\delta(\zeta-\zeta')$. 同理，在下限处的值也如此. 所以最后得

$$\langle\phi(\zeta')|\phi(\zeta)\rangle = 4\pi\, a(\zeta)\,\delta(\zeta-\zeta'). \tag{52.7}$$

由于 (52.3) 可以解析地延拓到复 ζ 的上半平面，对 ζ 取微商，再令 $\zeta=\zeta'=\zeta_n$，得到

$$\frac{d}{dx}W\big[\dot\phi(x,\zeta_n),\psi(x,\zeta)\big] = -i\frac{1}{2}(1-\rho^2\zeta_n^{-2})\big\{\phi_1(x,\zeta_n)\psi_1(x,\zeta_n) + \phi_2(x,\zeta_n)\psi_1(x,\zeta_n)\big\}. \tag{52.8}$$

因而

$$\langle\phi(\zeta_n)|\phi(\zeta_n)\rangle = \frac{2}{-i(1-\rho^2\zeta_n^{-2})}W\left[\dot{\phi}(x,\zeta_n),\psi(x,\zeta)\right]\Big|_{-L}^{L}, \qquad (52.9)$$

式中 $L\to\infty$. 所以

$$\langle\phi(\zeta_n)|\phi(\zeta_n)\rangle = i2\dot{a}(\zeta_n). \qquad (52.10)$$

由于约化变换，有关 $\tilde{\phi}(x,\zeta)$ 等的正交关系，可以用简单代换得出.

$$\langle\tilde{\phi}(\zeta')|\tilde{\phi}(\zeta)\rangle = 4\pi\,\tilde{a}(\zeta)\,\delta(\zeta-\zeta'), \qquad (52.11)$$

和

$$\langle\tilde{\phi}(\bar{\zeta}_n)|\tilde{\phi}(\bar{\zeta}_n)\rangle = -i2\dot{\tilde{a}}(\bar{\zeta}_n). \qquad (52.12)$$

将 (52.7) 中的 ζ 代换为 $\rho^2\zeta^{-1}$, 得

$$\langle\phi(\rho^2\zeta'^{-1})|\phi(\zeta)\rangle = 4\pi\,a(\zeta)\,\delta(\zeta-\rho^2\zeta'^{-1}). \qquad (52.13)$$

再利用约化变换 (45.10) 和 (45.11), 得到

$$\langle\tilde{\phi}(\zeta')|\phi(\zeta)\rangle = i\rho^{-1}\zeta 4\pi\,a(\zeta)\,\delta(\zeta-\rho^2\zeta'^{-1}). \qquad (52.14)$$

同理，得

$$\langle\phi(\zeta')|\tilde{\phi}(\zeta)\rangle = -i\rho^{-1}\zeta 4\pi\,\tilde{a}(\zeta)\,\delta(\zeta-\rho^2\zeta'^{-1}). \qquad (52.15)$$

类似地，有

$$\langle\phi(\zeta_n)|\tilde{\phi}(\bar{\zeta}_n)\rangle = -2\rho^{-1}\zeta_n\dot{a}(\zeta_n) \qquad (52.16)$$

和

$$\langle\tilde{\phi}(\bar{\zeta}_n)|\phi(\zeta_n)\rangle = -2\rho^{-1}\bar{\zeta}_n\dot{\tilde{a}}(\bar{\zeta}_n). \qquad (52.17)$$

这样我们可以得到两类约斯特解间的内积.

由于约化变换下约斯特解的性质 (45.8), 可见 $\psi(x,\zeta)$ 与 $\tilde{\psi}(x,\zeta')$ 当 $\zeta\zeta'=\rho^2$ 时是成正比的，这说明只有一个是独立的. 同理，由

(45.10) 可见， $\phi(x,\zeta)$ 与 $\tilde{\phi}(x,\zeta')$ 当 $\zeta\zeta'=\rho^2$ 时成正比，只有一个是独立的．在约斯特解的完备性的讨论中这是十分重要的．

§ 53 完备性的证明

如果以上得到的约斯特解是完备的，则满足第一个拉克斯方程的任何解 $f(x)$ 可以用它们来展开． $f(x)$ 对应的狄喇克右矢 $|f\rangle$ 可以展开为

$$|f\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(\zeta)|\phi(\zeta)\rangle+\tilde{f}(\zeta)|\tilde{\phi}(\zeta)\rangle\right\}d\zeta$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\left\{f_n|\phi(\zeta_n)\rangle+\tilde{f}_n|\tilde{\phi}(\bar{\zeta}_n)\rangle\right\}. \tag{53.1}$$

对右端的积分，作变数代换 $\zeta=\rho^2\zeta'^{-1}$, 积分成为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f(\rho^2\zeta'^{-1})i\rho^{-1}\zeta'|\tilde{\phi}(\zeta')\rangle-\tilde{f}(\rho^2\zeta'^{-1})i\rho^{-1}\zeta'|\phi(\zeta')\rangle\right\}\frac{\rho^2}{\zeta'^2}d\zeta'. \tag{53.2}$$

所以，有

$$f(\zeta)=-i\rho\zeta^{-1}\tilde{f}(\rho^2\zeta^{-1}) \tag{53.3}$$

和

$$\tilde{f}(\zeta)=i\rho\zeta^{-1}f(\rho^2\zeta^{-1}). \tag{53.4}$$

同理，由约化变换的不变性得

$$f_n=-i\rho\zeta_n^{-1}\tilde{f}_n \tag{53.5}$$

和

$$\tilde{f}_n=i\rho\bar{\zeta}_n^{-1}f_n. \tag{53.6}$$

这说明， (53.1) 的积分两项并不独立，可以只保留一项．求和的两项也不独立，可以只保留一项．于是我们取

$$|f\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(\zeta)|\phi(\zeta)\rangle d\zeta+\sum_{n=1}^{N}f_n|\phi(\zeta_n)\rangle. \tag{53.7}$$

利用上面正交性的结果，得到

$$\langle\phi(\zeta')|f\rangle = 4\pi a(\zeta')f(\zeta'), \qquad \langle\phi_n|f\rangle = i2\dot{a}(\zeta_n). \tag{53.8}$$

再代回到 (53.7), 立即看到应有

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(\zeta)\rangle \frac{1}{4\pi a(\zeta)} \langle\phi(\zeta)|d\zeta - i\sum_{n=1}^{N} |\phi(\zeta_n)\rangle \frac{1}{2\dot{a}(\zeta_n)} \langle\phi(\zeta_n)|. \tag{53.9}$$

上式也就是

$$\begin{aligned}\delta(x-y) = &\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\zeta)\frac{1}{a(\zeta)}\phi(y,\zeta)^A\, d\zeta \\ &- i\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \phi(x,\zeta_n)\frac{1}{\dot{a}(\zeta_n)}\phi(y,\zeta_n)^A.\end{aligned} \tag{53.10}$$

利用 (44.16) 和伴随态的定义，上式化为

$$\begin{aligned}\delta(x-y) = &\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(x,\zeta)\psi(y,\zeta)^T\sigma_1\, d\zeta \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(\zeta)\psi(x,\zeta)\psi(y,\zeta)^T\sigma_1\, d\zeta \\ &- i\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{\dot{a}(\zeta_n)}\psi(x,\zeta_n)\psi(y,\zeta_n)^T\sigma_1.\end{aligned} \tag{53.11}$$

我们先看 $a(\zeta)$ 无零点的情况. 这时右端后两项为 0, 第一项的被积函数为

$$E_{\cdot 1}(x,\zeta)E_{\cdot 2}(y,\zeta)^T\sigma_1. \tag{53.12}$$

由 (51.5), 积分所得正是 $\delta(x-y)$. 这样，我们就在 $a(\zeta)$ 无零点时证明了完备性 (53.10).

当 $a(\zeta)$ 存在零点时， (53.11) 的右端可以利用马尔钦柯方程来计算. 这时 (53.11) 右端第一项，在以上式代入后得

$$\delta(x-y) + \sigma_1 K(y,x)^T\sigma_1\theta(x-y) + K(x,y)\theta(y-x)$$

$$+\int_x^\infty\int_y^\infty K(x,s)\sigma_1 K(y,t)^T\sigma_1\delta(s-t)\,dt\,ds, \tag{53.13}$$

式中

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0 \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } x<0 \text{ 时.}\end{cases} \tag{53.14}$$

(53.11) 右端其余各项可以化为

$$F(x+y)+\int_x^\infty K(x,s)F(s+y)\,ds+\int_y^\infty F(x+t)\sigma_1 K(y,t)^T\,dt$$

$$+\int_x^\infty\int_y^\infty K(x,s)F(s+t)\sigma_1 K(y,t)^T\sigma_1\,ds\,dt. \tag{53.15}$$

现在看 $y>x$ 的情况. (53.13) 的第 2 项为 0, 第 3 项为 $K(x,y)$. 它与 (53.15) 的第 1 项、第 2 项由于马尔钦柯方程而消去. (53.13) 的最后一项, 与 (53.15) 的第 3 项、第 4 项也消去. 只剩下 (53.13) 的第 1 项 $\delta(x-y)$. 当 $y<x$ 时, (53.13) 的第 3 项为 0, 第 2 项为 $\sigma_1 K(y,x)^T\sigma_1$. 这时只要注意

$$F(x)=\sigma_1 F(x)^T\sigma_1, \tag{53.16}$$

同样可以得到, 只有 (53.13) 的第 1 项 $\delta(x-y)$ 留下. 于是不论 y 从何方趋于 x, 都算出为 $\delta(x-y)$. 这就证明了完备性.

这里, 希望读者细细领会约斯特解的约化变换的性质导致完备的约斯特解的特殊选取.

§ 54 基本的泊松括号 (连续谱情况)

在哈密顿公式系统中, $u(x)$ 和 $i\,\overline{u(x)}$ 是正则共轭变量, 所以泊松括号的定义是

$$\{S,T\}=-i\int_{-\infty}^\infty\left(\frac{\delta S}{\delta u(x)}\frac{\delta T}{\delta\overline{u(x)}}-\frac{\delta S}{\delta\overline{u(x)}}\frac{\delta T}{\delta u(x)}\right)dx. \tag{54.1}$$

由 (43.5) 得

$$\partial_x \delta \Phi(x,\zeta) = L(x,\zeta)\delta \Phi(x,\zeta) + \delta L(x,\zeta)\ \Phi(x,\zeta). \tag{54.2}$$

显然可解出

$$\delta \Phi(x,\zeta) = \int_{-\infty}^{x} \Phi(x,\zeta)\Phi^{-1}(z,\zeta)\delta L(z,\zeta)\ \Phi(z,\zeta)dz. \tag{54.3}$$

因为

$$\frac{\delta L(z,\zeta)}{\delta u(z')} = \delta(z-z')\sigma_+, \qquad \frac{\delta L(z,\zeta)}{\delta \overline{u(z')}} = \delta(z-z')\sigma_-, \tag{54.4}$$

所以，当 $x > z$ 时，由 (54.3) 有

$$\frac{\delta \Phi(x,\zeta)}{\delta u(z)} = \Phi(x,\zeta)\Phi^{-1}(z,\zeta)\sigma_+ \Phi(z,\zeta) \tag{54.5}$$

和

$$\frac{\delta \Phi(x,\zeta)}{\delta \overline{u(z)}} = \Phi(x,\zeta)\Phi^{-1}(z,\zeta)\sigma_- \Phi(z,\zeta). \tag{54.5}$$

在极限 $z \to x^- = x - 0$ 下，有

$$\frac{\delta \Phi(x,\zeta)}{\delta u(x^-)} = \sigma_+ \Phi(x,\zeta), \qquad \frac{\delta \Phi(x,\zeta)}{\delta \overline{u(x^-)}} = \sigma_- \Phi(x,\zeta). \tag{54.6}$$

类似地，在极限 $z \to x^+ = x + 0$ 下，有

$$\frac{\delta \Psi(x,\zeta)}{\delta u(x^+)} = -\sigma_+ \Phi(x,\zeta), \qquad \frac{\delta \Psi(x,\zeta)}{\delta \overline{u(x^+)}} = -\sigma_- \Psi(x,\zeta). \tag{54.7}$$

由 (44.27) 等，得到

$$\frac{\delta a(\xi)}{\delta u(x)} = (1-\rho^2\xi^{-2})^{-1}\phi_2(x,\xi)\psi_2(x,\xi), \tag{54.8}$$

$$\frac{\delta a(\xi)}{\delta \overline{u(x)}} = -(1-\rho^2\xi^{-2})^{-1}\phi_1(x,\xi)\psi_1(x,\xi), \tag{54.9}$$

$$\frac{\delta b(\xi)}{\delta u(x)} = -(1-\rho^2\xi^{-2})^{-1}\phi_2(x,\xi)\tilde{\psi}_2(x,\xi) \tag{54.10}$$

和

$$\frac{\delta b(\xi)}{\delta \overline{u(x)}} = (1-\rho^2\xi^{-2})^{-1}\phi_1(x,\xi)\tilde{\psi}_1(x,\xi). \tag{54.11}$$

所以，得

$$\{a(\xi), b(\xi')\} = -i\frac{1}{(1-\rho^2\xi^{-2})(1-\rho^2\xi'^{-2})}\int_{-\infty}^{\infty} A(x,\xi,\xi')dx, \tag{54.12}$$

这里

$$A(x,\xi,\xi') = \phi_2(x,\xi)\psi_2(x,\xi)\phi_1(x,\xi')\tilde{\psi}_1(x,\xi') - \phi_1(x,\xi)\psi_1(x,\xi)\phi_2(x,\xi')\tilde{\psi}_2(x,\xi'). \tag{54.13}$$

由 (43.5) 得

$$\partial_x\left\{W\left[\phi(x,\xi),\phi(x,\xi')\right]W\left[\psi(x,\xi),\tilde{\psi}(x,\xi')\right]\right\} = i2(\lambda-\lambda')A(x,\xi,\xi'). \tag{54.14}$$

于是

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{i2(\lambda-\lambda')}\left\{W\left[\phi(x,\xi),\phi(x,\xi')\right]W\left[\psi(x,\xi),\tilde{\psi}(x,\xi')\right]\right\}\Big|_{-L}^{L} = \int_{-\infty}^{\infty} A(x,\xi,\xi')dx. \tag{54.15}$$

上式的括号为

$$a(\xi)b(\xi')W\left[\tilde{\psi}(L,\xi),\psi(L,\xi')\right]W\left[\psi(L,\xi),\tilde{\psi}(L,\xi')\right]$$

$$+b(\xi)a(\xi')W\left[\psi(L,\xi),\tilde{\psi}(L,\xi')\right]W\left[\psi(L,\xi),\tilde{\psi}(L,\xi')\right]$$

$$+a(\xi)b(\xi')W\big[\phi(-L,\xi),\phi(-L,\xi')\big]W\big[\tilde{\phi}(-L,\xi),\tilde{\phi}(-L,\xi')\big]$$

$$+\tilde{b}(\xi)\tilde{a}(\xi')W\big[\phi(-L,\xi),\phi(-L,\xi')\big]W\big[\phi(-L,\xi),\phi(-L,\xi')\big]. \quad (54.16)$$

代入 (54.15), 第 1 项和第 3 项之和是

$$-\frac{1}{i2(\lambda-\lambda')}a(\xi)b(\xi')\left\{(1-\rho^2\xi^{-1}\xi'^{-1})^2+(\rho\xi^{-1}-\rho\xi'^{-1})^2\right\}$$

$$=-\frac{1}{i2(\lambda-\lambda')}a(\xi)b(\xi')\xi^{-1}\xi'^{-1}(\lambda\lambda'-\rho^2), \quad (54.17)$$

第 2 项为

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{i2(\lambda-\lambda')}b(\xi)a(\xi')(1-\rho^2\xi^{-1}\xi'^{-1})^2e^{i2(\kappa-\kappa')L}$$

$$=a(\xi)b(\xi')(1-\rho^2\xi^{-2})\pi\delta(\xi-\xi'), \quad (54.18)$$

第 4 项为

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{i2(\lambda-\lambda')}\tilde{b}(\xi)\tilde{a}(\xi')(i\rho\xi^{-1}-i\rho\xi'^{-1})^2e^{i2(\kappa+\kappa')L}$$

$$=\tilde{b}(\xi)\tilde{a}(\xi')(1-\rho^{-2}\xi^2)\pi\delta(\xi-\rho^2\xi'^{-1})$$

$$=-a(\xi)b(\xi')(1-\rho^{-2}\xi^2)\pi\delta(\xi-\rho^2\xi'^{-1}). \quad (54.19)$$

最后的等式用到 (45.11) 和 (45.12). 注意

$$\delta(\lambda-\lambda')=\frac{2}{1-\rho^2\xi^{-2}}\left\{\delta(\xi-\xi')+\delta(\xi-\rho^2\xi'^{-1})\right\}, \quad (54.20)$$

(54.12) 成为

$$\{a(\xi),b(\xi')\}=\frac{1}{2}a(\xi)b(\xi')\frac{\lambda\lambda'-\rho^2}{\kappa\kappa'}\frac{1}{\lambda-\lambda'+i0}. \quad (54.21)$$

类似地，有

$$\{b(\xi),b(\xi')\}=i\frac{1}{(1-\rho^2\xi^{-2})(1-\rho^2\xi'^{-2})}\int_{-\infty}^{\infty}B(x,\xi,\xi')dx, \quad (54.22)$$

这里

$$B(x,\xi,\xi') = \phi_2(x,\xi)\tilde{\psi}_2(x,\xi)\phi_1(x,\xi')\tilde{\psi}_1(x,\xi')$$
$$- \phi_1(x,\xi)\tilde{\psi}_1(x,\xi)\phi_2(x,\xi')\tilde{\psi}_2(x,\xi'). \qquad (54.23)$$

同样的手续，得

$$\partial_x \left\{ W\left[\phi(x,\xi),\phi(x,\xi')\right] W\left[\tilde{\psi}(x,\xi),\tilde{\psi}(x,\xi')\right] \right\}$$
$$= i2(\lambda - \lambda')B(x,\xi,\xi'). \qquad (54.24)$$

于是

$$\lim_{L\to\infty} \frac{1}{i2(\lambda-\lambda')} \left\{ W\left[\phi(x,\xi),\phi(x,\xi')\right] W\left[\tilde{\psi}(x,\xi),\tilde{\psi}(x,\xi')\right] \right\} \Big|_{-L}^{L}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} B(x,\xi,\xi')dx. \qquad (54.25)$$

最后得到

$$\{b(\xi), b(\xi')\} = i2\pi|a(\xi)|^2(1-\rho^2\xi^{-2})^{-1}\delta(\xi - \rho^2\xi'^{-1}). \qquad (54.26)$$

利用约化变换，由 (54.21) 得

$$\{\tilde{a}(\xi), \tilde{b}(\xi')\} = \frac{1}{2}\tilde{a}(\xi)\tilde{b}(\xi')\frac{\lambda\lambda'-\rho^2}{\kappa\kappa'}\frac{1}{\lambda-\lambda'-i0}, \qquad (54.27)$$

$$\{a(\xi), \tilde{b}(\xi')\} = -\frac{1}{2}a(\xi)\tilde{b}(\xi')\frac{\lambda\lambda'-\rho^2}{\kappa\kappa'}\frac{1}{\lambda-\lambda'+i0} \qquad (54.28)$$

和

$$\{\tilde{a}(\xi), b(\xi')\} = -\frac{1}{2}\tilde{a}(\xi)b(\xi')\frac{\lambda\lambda'-\rho^2}{\kappa\kappa'}\frac{1}{\lambda-\lambda'-i0}. \qquad (54.29)$$

由 (54.26) 得

$$\{\tilde{b}(\xi), \tilde{b}(\xi')\} = -i2\pi|a(\xi)|^2(1-\rho^2\xi^{-2})^{-1}\delta(\xi - \rho^2\xi'^{-1}), \qquad (54.30)$$

$$\{b(\xi), \tilde{b}(\xi')\} = i2\pi |a(\xi)|^2 (1-\rho^2\xi^{-2})^{-1}\delta(\xi-\xi') \tag{54.31}$$

和

$$\{\tilde{b}(\xi), b(\xi')\} = -i2\pi |a(\xi)|^2 (1-\rho^2\xi^{-2})^{-1}\delta(\xi-\xi'). \tag{54.32}$$

最后容易得到

$$\{a(\xi), a(\xi')\} = \{\tilde{a}(\xi), \tilde{a}(\xi')\} = \{a(\xi), \tilde{a}(\xi')\} = \{\tilde{a}(\xi), a(\xi')\} = 0. \tag{54.33}$$

§ 55　基本的泊松括号（分立谱情况）

由

$$\delta a(\zeta)\Big|_{\zeta=\zeta_n} + \dot{a}(\zeta_n)\delta\zeta_n = 0 \tag{55.1}$$

得

$$\frac{\zeta_n}{\delta u(x)} = -\dot{a}(\zeta_n)^{-1}\frac{\delta a(\zeta)}{\delta u(x)}\Big|_{\zeta=\zeta_n}. \tag{55.2}$$

于是

$$\frac{\zeta_n}{\delta u(x)} = -b_n\dot{a}(\zeta_n)^{-1}(1-\rho^2\zeta_n^{-2})^{-1}\psi_2^2(x,\zeta_n). \tag{55.3}$$

类似地，有

$$\frac{\overline{\zeta_n}}{\overline{\delta u(x)}} = b_n\dot{a}(\zeta_n)^{-1}(1-\rho^2\zeta_n^{-2})^{-1}\psi_1^2(x,\zeta_n). \tag{55.4}$$

由

$$b_n = \frac{\phi_1(z,\zeta_n)}{\psi_1(z,\zeta_n)} = \frac{\phi_2(z,\zeta_n)}{\psi_2(z,\zeta_n)} \tag{55.5}$$

得

$$\frac{\delta b_n}{\delta u(x)} = \frac{1}{\psi_2(z,\zeta_n)}\frac{\delta\phi_2(z,\zeta_n)}{\delta u(x)} + \frac{\dot{\phi}_2(z,\zeta_n)}{\psi_2(z,\zeta_n)}\frac{\delta\zeta_n}{\delta u(x)}$$

$$
-\frac{\phi_2(z,\zeta_n)}{\psi_2^2(z,\zeta_n)}\frac{\delta\psi_2(z,\zeta_n)}{\delta u(x)}-\frac{\phi_2(z,\zeta_n)\dot{\psi}_2(z,\zeta_n)}{\psi_2^2(z,\zeta_n)}\frac{\delta\zeta_n}{\delta u(x)}. \tag{55.6}
$$

由于左端独立于 z, 可以取极限 $z\to x^-=x-0$, 利用 (54.7) 得

$$
\frac{\delta b_n}{\delta u(x)}=-\dot{a}(\zeta_n)^{-1}(1-\rho^2\zeta_n^{-2})^{-1}
$$

$$
\cdot\left\{\dot{\phi}_2(x,\zeta_n)\phi_2(x,\zeta_n)-b_n^2\dot{\psi}_2(x,\zeta_n)\psi_2(x,\zeta_n)\right\}. \tag{55.7}
$$

$$
\frac{\delta b_n}{\delta\overline{u(x)}}=\dot{a}(\zeta_n)^{-1}(1-\rho^2\zeta_n^{-2})^{-1}
$$

$$
\cdot\left\{\dot{\phi}_1(x,\zeta_n)\phi_1(x,\zeta_n)-b_n^2\dot{\psi}_1(x,\zeta_n)\psi_1(x,\zeta_n)\right\}. \tag{55.8}
$$

有了这些，我们可以像前面一样计算包含 ζ_n、b_n 等的泊松括号，不过手续相当复杂.

如果假定 $b(\zeta)$ 和 $\tilde{b}(\zeta)$ 可以解析地延拓到复 ζ 平面实轴之外的某一区域，且有

$$
b_n=b(\zeta_n),\qquad \tilde{b}_n=\tilde{b}(\bar{\zeta}_n), \tag{55.9}
$$

由 (54.21)、(54.27) 等立即得到

$$
\{a(\xi),b_n\}=\frac{1}{2}a(\xi)b_n\frac{\lambda\lambda_n-\rho^2}{\kappa\kappa_n}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}, \tag{55.10}
$$

$$
\{\tilde{a}(\xi),\tilde{b}_n\}=-\frac{1}{2}\tilde{a}(\xi)\tilde{b}_n\frac{\lambda\lambda_n-\rho^2}{\kappa\kappa_n}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}, \tag{55.11}
$$

$$
\{a(\xi),\tilde{b}_n\}=\frac{1}{2}a(\xi)\tilde{b}_n\frac{\lambda\lambda_n-\rho^2}{\kappa\kappa_n}\frac{1}{\lambda-\lambda_n} \tag{55.12}
$$

和

$$
\{\tilde{a}(\xi),b_n\}=-\frac{1}{2}\tilde{a}(\xi)b_n\frac{\lambda\lambda_n-\rho^2}{\kappa\kappa_n}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}. \tag{55.13}
$$

注意到 (54.26) 等右端的 δ 函数，可见

$$
\{b(\xi),b_n\}=\{\tilde{b}(\xi),\tilde{b}_n\}=\{b(\xi),\tilde{b}_n\}=\{\tilde{b}(\xi),b_n\}=0. \tag{55.14}
$$

同理，有

$$\{b_m, b_n\} = \{\tilde{b}_m, \tilde{b}_n\} = \{b_m, \tilde{b}_n\} = \{\tilde{b}_m, b_n\} = 0. \tag{55.15}$$

由于 (54.21), 可以将 $a(\xi)$ 解析延拓到复 ζ 上半平面，即

$$\{a(\zeta), b(\xi')\} = \frac{1}{2}a(\zeta)b(\xi')\frac{\lambda\lambda' - \rho^2}{\kappa\kappa'}\frac{1}{\lambda - \lambda' + i0}, \tag{55.16}$$

这里 $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$. 由 (45.47), 有

$$a(\zeta) = \breve{a}(\zeta)\prod_{n=1}^{N}\frac{\zeta - \zeta_n}{\zeta - \bar{\zeta}_n}, \tag{55.17}$$

这里 $\breve{a}(\zeta)$ 在复 ζ 的上半平面无零点. 由 (55.16) 可见 $\{\ln a(\zeta), b(\xi')\}$ 等于

$$\{\ln \breve{a}(\zeta), b(\xi')\} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\{\bar{\zeta}_n, b(\xi')\}}{\zeta - \bar{\zeta}_n} - \frac{\{\zeta_n, b(\xi')\}}{\zeta - \zeta_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}b(\xi')\frac{\lambda\lambda' - \rho^2}{\kappa\kappa'}\frac{1}{\lambda - \lambda' + i0}. \tag{55.18}$$

若 $\zeta = \zeta_n$, 则 $\lambda = \lambda_n = \mathrm{Re}\,\zeta_n$. 因为 ξ' 为实数时， λ' 为实数，所以

$$\lambda_n - \lambda' + i0 \neq 0. \tag{55.19}$$

这表示 λ_n 不可能是 (55.18) 的极点. 于是 (55.18) 给出

$$\{\zeta_n, b(\xi)\} = 0. \tag{55.20}$$

同理，得

$$\{\zeta_n, \tilde{b}(\xi)\} = \{\bar{\zeta}_n, b(\xi)\} = \{\bar{\zeta}_n, \tilde{b}(\xi)\} = 0. \tag{55.21}$$

由 (55.10) 得

$$\{a(\zeta), b_n\} = \frac{1}{2}a(\zeta)b_n\frac{\lambda\lambda_n - \rho^2}{\kappa\kappa_n}\frac{1}{\lambda - \lambda_n}. \tag{55.22}$$

于是 $\{\ln a(\zeta), b_n\}$ 为

$$\{\ln \breve{a}(\zeta), b_n\} + \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\{\bar{\zeta}_m, b_n\}}{\zeta-\bar{\zeta}_m} - \frac{\{\zeta_n, b_m\}}{\zeta-\zeta_m}\right)$$

$$= \frac{1}{2}b_n\frac{\lambda\lambda_n-\rho^2}{\kappa\kappa_n}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}. \tag{55.23}$$

由 (55.23) 的右端可见，它有一个极点在 $\zeta=\zeta_n$ 处. 写下

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda_n-\rho^2}{\kappa\kappa_n}\frac{1}{\lambda-\lambda_n} = \frac{1}{\zeta-\zeta_n}f(\zeta), \tag{55.24}$$

这里

$$f(\zeta) = \frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda_n-\rho^2}{\kappa\kappa_n(1-\rho^2\zeta^{-1}\zeta_n^{-1})}. \tag{55.25}$$

它在 ζ 的上半平面没有极点. 所以

$$f(\zeta_n) = (1-\rho^2\zeta_n^{-2})^{-1}. \tag{55.26}$$

代入 (55.23), 得

$$\{\zeta_m, b_n\} = -b_n(1-\rho^2\zeta_n^{-2})^{-1}\delta_{mn}. \tag{55.27}$$

类似地，有

$$\{\bar{\zeta}_m, b_n\} = -b_n(1-\rho^2\bar{\zeta}_n^{-2})^{-1}\delta_{mn}, \tag{55.28}$$

$$\{\zeta_m, \tilde{b}_n\} = -\tilde{b}_n(1-\rho^2\zeta_n^{-2})^{-1}\delta_{mn} \tag{55.29}$$

和

$$\{\bar{\zeta}_m, \tilde{b}_n\} = -\tilde{b}_n(1-\rho^2\bar{\zeta}_n^{-2})^{-1}\delta_{mn}. \tag{55.30}$$

还有

$$\{a(\zeta), \zeta_n\} = \{\tilde{a}(\zeta), \zeta_n\} = \{a(\zeta), \bar{\zeta}_n\} = \{\tilde{a}(\zeta), \bar{\zeta}_n\} = 0 \tag{55.31}$$

和

$$\{\zeta_m, \zeta_n\} = \{\bar{\zeta}_m, \zeta_n\} = \{\zeta_m, \bar{\zeta}_n\} = \{\bar{\zeta}_m, \bar{\zeta}_n\} = 0. \tag{55.32}$$

§ 56 守 恒 量

由 (43.5), 对于约斯特解 $\psi(x,\zeta)$, 有

$$\psi_{1x} = -i\lambda\psi_1 + u\,\psi_2, \qquad \psi_{2x} = i\lambda\psi_2 + \bar{u}\,\psi_1. \tag{56.1}$$

由此得

$$(\psi_{2x} - i\lambda\psi_2)_x - \left(\frac{\bar{u}_x}{\bar{u}} - i\lambda\right)(\psi_{2x} - i\lambda\psi_2) - |u|^2\psi_2 = 0. \tag{56.2}$$

在讨论极限 $|\zeta| \to \infty$ 时约斯特解的渐近行为时，我们先引入 $\hat{\psi}$,

$$\psi_2(x,\zeta) = e^{i\kappa x + \hat{\psi}}. \tag{56.3}$$

代入 (56.2), 得

$$\hat{\psi}_{xx} + \left(i\kappa + \hat{\psi}_x\right)^2 - \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}}\left(-i\lambda + i\kappa + \hat{\psi}_x\right) + \lambda^2 - |u|^2 = 0 \tag{56.4}$$

或

$$\left(\hat{\psi}_x\right)^2 + \bar{u}\left(\frac{1}{\bar{u}}\hat{\psi}_x\right)^2 + i\frac{\bar{u}_x}{\bar{u}}\rho^2\zeta^{-1} + i(\zeta - \rho^2\zeta^{-1})\hat{\psi}_x + \rho^2 - |u|^2 = 0. \tag{56.5}$$

当 $|\zeta| \to \infty$ 时，有

$$\hat{\psi} \to 0, \qquad \hat{\psi}_x \to 0. \tag{56.6}$$

写下

$$\hat{\psi}_x = \mu, \qquad \mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (i\zeta)^{-j}. \tag{56.7}$$

代入 (56.5), 得

$$\mu_1 = -\rho^2 + |u|^2, \tag{56.8}$$

$$\mu_2 = \frac{\bar{u}_x}{\bar{u}}\rho^2 - \bar{u}\left(\frac{1}{\bar{u}}\mu_1\right)_x = -\bar{u}u_x, \tag{56.9}$$

$$\mu_j = -\mu_{j-2}\rho^2 - \bar{u}\left(\frac{1}{\bar{u}}\mu_{j-1}\right)_x - \sum_{k=1}^{j-2}\mu_k\mu_{j-1-k}, \quad j \geq 3. \tag{56.10}$$

由 (56.10), 可以得出

$$\mu_3 = \left(\rho^2 - |u|^2\right)|u|^2 + \bar{u}u_{xx}, \tag{56.11}$$

等等.

将 (56.3) 代入 (56.1) 的第二式，得

$$\psi_1(x,\zeta) = \frac{1}{\bar{u}}\left(-i\rho^2\zeta^{-1} + \hat{\psi}_x\right)e^{i\kappa x + \hat{\psi}}. \tag{56.12}$$

取极限 $x \to -\infty$, 注意

$$\hat{\psi}(-\infty) = \lim_{x\to-\infty}\hat{\psi}(x), \tag{56.13}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\hat{\psi}_x = 0, \tag{56.14}$$

由 (44.27), 得到

$$a(\zeta) = e^{i\frac{1}{2}\alpha}e^{\hat{\psi}(-\infty)}. \tag{56.15}$$

也就是

$$\hat{\psi}(-\infty) = \ln\left\{a(\zeta)e^{-i\frac{1}{2}\alpha}\right\}. \tag{56.16}$$

既然 $a(\zeta)$ 独立于 t,$\hat{\psi}(-\infty)$ 也独立于 t. 写下按 ζ^{-1} 的展开式,

$$\hat{\psi}(-\infty) = \sum_{j=1}^{\infty} I_j(i\zeta)^{-j}, \tag{56.17}$$

则

$$I_j = -\int_{-\infty}^{\infty}\mu_j(x)dx. \tag{56.18}$$

于是，所有的 I_j 都是守恒量. 由 (45.47), 得

$$\ln\left\{a(\zeta)e^{-i\frac{1}{2}\alpha}\right\} = \sum_{n=1}^{N}\ln\left(\frac{\zeta-\zeta_n}{\zeta-\bar{\zeta}_n}\right) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|a(\xi)|^2}{\zeta-\xi}d\xi. \tag{56.19}$$

按 ζ^{-1} 展开，上式成为

$$\sum_{j=1}^{\infty}\zeta^{-j}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{j}\left(\bar{\zeta}_n^j-\zeta_n^j\right)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^{j-1}\ln|a(\xi)|^2\,d\xi\right). \tag{56.20}$$

所以

$$I_j=(i)^j\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{j}\left(\bar{\zeta}_n^j-\zeta_n^j\right)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^{j-1}\ln|a(\xi)|^2\,d\xi\right). \tag{56.21}$$

由 (56.8) 等，就得到

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}(\rho^2-|u|^2)dx=i\sum_{n=1}^{N}\left(\bar{\zeta}_n-\zeta_n\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln|a(\xi)|^2d\xi, \tag{56.22}$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}u_x dx=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\bar{\zeta}_n^2-\zeta_n^2\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\xi\ln|a(\xi)|^2d\xi, \tag{56.23}$$

$$\begin{aligned}I_3&=\int_{-\infty}^{\infty}\left((\rho^2-|u|^2)|u|^2+\bar{u}u_{xx}\right)dx\\&=-i\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\bar{\zeta}_n^3-\zeta_n^3\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\ln|a(\xi)|^2d\xi,\end{aligned} \tag{56.24}$$

等等.

§ 57 哈密顿公式和角变量及作用变量

NLS$^+$ 方程可以表为哈密顿形式

$$u_t=\{H,u\}=i\frac{\delta H}{\delta\bar{u}}, \tag{57.1}$$

这里哈密顿量为

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(|u|^2-\rho^2\right)^2-\bar{u}u_{xx}\right\}dx. \tag{57.2}$$

我们看到

$$H = \rho^2 I_1 + I_3 = -i \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{1}{3} \left(\bar{\zeta}_n^3 - \zeta_n^3 \right) - \rho^2 \left(\bar{\zeta}_n - \zeta_n \right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\xi^2 - \rho^2 \right) \ln |a(\xi)|^2 d\xi. \tag{57.4}$$

利用前面已得到的泊松括号，容易得到

$$\partial_t a(\zeta) = \{H, a(\zeta)\} = 0, \tag{57.5}$$

即

$$a(\zeta, t) = a(\zeta, 0). \tag{57.6}$$

由 (54.21) 和 (54.29), 并注意 (54.20), 得到

$$\partial_t b(\xi) = \{H, b(\xi)\} = -i4\kappa\lambda b(\xi). \tag{57.7}$$

也就是

$$b(\xi, t) = b(\xi, 0) e^{-i4\kappa\lambda t}. \tag{57.8}$$

同样，得

$$\partial_t b_n = \{H, b_n\} = -i4\kappa_n \lambda_n b_n. \tag{57.9}$$

也就是

$$b_n(t) = b_n(0) e^{-i4\kappa_n \lambda_n t}. \tag{57.10}$$

现在来引入角变量和作用变量. 由 (57.4) 可见， H 包含 ζ_n、$\bar{\zeta}_n$ $(n = 1, 2, ..., N)$ 和 $|a(\xi)|^2$, 这里 ξ 为实数. 并且它们彼此的泊松括号为 0. 所以作用变量 $p(\xi)$ 和 P_n 可以由它们来定义. 由于约化变换的性质，我们可以限制 $\xi^2 \geq \rho^2$. 定义

$$p(\xi) = \frac{1}{2\pi}(1 - \rho^2 \xi^{-2}) \ln |a(\xi)|^2, \qquad \xi^2 \geq \rho^2 \tag{57.11}$$

$$P_n = -2\lambda_n = -2\mathrm{Re}\,\zeta_n. \qquad n = 1, 2, ..., N \tag{57.12}$$

用它们表示出

$$H=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(4\rho^2-P_n^2\right)^{\frac{3}{2}}+\int_{|\xi|\geq\rho}\left(\xi^2-\rho^4\xi^{-2}\right)p(\xi)d\xi. \qquad (57.13)$$

相应的角变量 $q(\xi)$ 和 Q_n 选作

$$q(\xi)=-\arg b(\xi)=-i\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{\bar{b}(\xi)}{b(\xi)}\right\}, \qquad \xi^2\geq\rho^2 \quad (57.14)$$

$$Q_n=\ln|b_n|. \qquad n=1,2,...,N \quad (57.15)$$

容易看出，

$$\{b(\xi),b(\xi')\}=0, \qquad (57.16)$$

$$\{p(\xi),q(\xi')\}=\delta(\xi-\xi'). \qquad \xi^2、\xi'^2\geq\rho^2 \quad (57.17)$$

由于 b_n 是纯虚的， $|b_n|=ib_n$ 或 $|b_n|=-ib_n$, 我们有

$$\begin{aligned}\{P_m,Q_n\}&=-\{(\zeta_m+\bar{\zeta}_m),\ln|b_n|\}\\&=-\tfrac{1}{ib_n}\left(\{\zeta_m,ib_n\}+\{\bar{\zeta}_m,ib_n\}\right)\\&=\left((1-\rho^2\zeta_n^{-2})^{-1}+(1-\rho^2\bar{\zeta}_n^{-2})^{-1}\right)\delta_{mn}=\delta_{mn}.\end{aligned} \qquad (57.18)$$

除了 (57.17) 和 (57.18) 外，角变量和作用变量中任何两个的泊松括号为 0.

由 H 的表示式 (57.13), 容易得到

$$\partial_t q(\xi)=\{H,q(\xi)\}=\xi^2-\rho^2\xi^{-2}=4\kappa\lambda. \qquad (57.19)$$

经过复杂的计算，也可得到

$$\begin{aligned}\partial_t Q_n=\{H,Q_n\}&=\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{N}\left\{(4\rho^2-P_m^2)^{\frac{3}{2}},Q_n\right\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N}(4\rho^2-P_m^2)^{\frac{1}{2}}\left\{(4\rho^2-P_m^2),Q_n\right\}\end{aligned}$$

$$= -(4\rho^2 - P_n^2)^{\frac{1}{2}} P_n = 4k_n\lambda_n. \tag{57.20}$$

这表示 $q(\xi)$ 和 Q_n 分别有周期 $2\kappa\lambda/\pi$ 和 $2k_n\lambda_n/\pi$. 这与前面的结果一致.

§ 58 常数相的佯谬

NLS$^+$ 方程的求解中， α 是解 $u(x)$ 在極限 $x \to -\infty$ 时的值的常数相，它不是力学量. 可另一方面，由 (45.48) 有

$$\alpha = i\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\rho^{-2}\zeta_n^2\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^{-1} \ln|a(\xi)|^2 d\xi. \tag{58.1}$$

它由力学量表示出来. 于是产生了如下著名的常数相的佯谬问题.

由 (54.21) 等，有

$$\left\{\ln|a(\xi)|^2, \ln b(\xi')\right\} = -i\pi\frac{\lambda\lambda' - \rho^2}{\kappa\kappa'}\delta(\lambda - \lambda'). \tag{58.2}$$

所以，由上两式得

$$\begin{aligned}\{\alpha, \ln b(\xi')\} &= -i\int_{-\infty}^{\infty} \xi^{-1}\frac{1}{1-\rho^2\xi^{-2}}\left\{\delta(\xi-\xi') - \delta(\xi - \rho^2\xi'^{-1})\right\} d\xi \\ &= -i\frac{1}{\kappa'}.\end{aligned} \tag{58.3}$$

这里我们利用了 (54.20).

由 (55.27) 等，有

$$\{\ln(\zeta_m)^2, \ln|b_n|\} = -\frac{1}{\kappa_n}\delta_{mn}. \tag{58.4}$$

所以

$$\{\alpha, \ln|b_n|\} = -i\frac{1}{\kappa_n}. \tag{58.5}$$

由 (58.3) 和 (58.5), 我们看到，α 与 $\ln b(\xi')$ 和 $\ln|b_n|$ 的泊松括号不为 0. 但是，α 是常数相，它与任何力学量的泊松括号必然为 0. 这就是著名的常数相问题.

我们注意，在讨论泊松括号 $\{a(\xi), b(\xi')\}$ 时，$a(\xi)$ 中的 ξ 应当理解为 $\xi + i0$. 在 (54.17) 的推演中，如果注意到这一点，情况就有不同. 将左端的因子移过来，(54.17) 对 $\{a(\xi), b(\xi')\}$ 的贡献是

$$\frac{1}{2(\lambda - \lambda')} a(\xi) b(\xi') \frac{\lambda\lambda' - \rho^2}{\kappa\kappa'}. \tag{58.6}$$

将 ξ 换成 $\xi + i0$ 时，κ 也就换成 $\kappa + i0$. 由于

$$\frac{1}{\kappa + i0} = P\frac{1}{\kappa} - i\pi\delta(\kappa), \tag{58.7}$$

所以 (58.6) 将换成两项：一是当 κ 为 0 时添上主值记号，二是加上如下的项，

$$-i\frac{1}{2(\lambda - \lambda')} a(\xi) b(\xi') \frac{\lambda\lambda' - \rho^2}{\kappa'} \pi\delta(\kappa). \tag{58.8}$$

于是，(58.2) 改为

$$\left\{\ln|a(\xi)|^2, \ln b(\xi')\right\} = -i\pi\frac{\lambda\lambda' - \rho^2}{\kappa\kappa'}\delta(\lambda - \lambda') - i\pi\frac{\lambda\lambda' - \rho^2}{\kappa'(\lambda - \lambda')}\delta(\kappa). \tag{58.9}$$

因为

$$\delta(\kappa) = \rho\left\{\delta(\xi - \rho) + \delta(\xi + \rho)\right\}, \tag{58.10}$$

所以

$$-i\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^{-1}\frac{\lambda\lambda' - \rho^2}{\kappa'(\lambda - \lambda')}\delta(\kappa) d\xi = i\frac{1}{\kappa'}. \tag{58.11}$$

我们看到，它与 (58.3) 正好抵消. 所以

$$\{\alpha, \ln b(\xi')\} = 0. \tag{58.12}$$

同样，(55.10) 右端的 κ 换为 $\kappa+i0$,(55.13) 右端的 κ 换为 $\kappa-i0$, 于是

$$\{\ln|a(\xi)|^2, \ln|b_n|\} = -i\pi\frac{\lambda\lambda_n-\rho^2}{\kappa_n(\lambda-\lambda_n)}\delta(\kappa). \tag{58.13}$$

我们得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^{-1}\{\ln|a(\xi)|^2, \ln|b_n|\}d\xi = i\frac{1}{\kappa_n}. \tag{58.14}$$

它正好抵消了 (58.5). 所以

$$\{\alpha, \ln|b_n|\} = 0. \tag{58.15}$$

注意 (57.14) 和 (57.15), 由 (58.12) 和 (58.15) 就得到

$$\{\alpha, q(\xi')\} = 0, \tag{58.16}$$

$$\{\alpha, Q_n\} = 0. \tag{58.17}$$

于是，常数相的问题并不存在，它是一个佯谬.

第 6 章

微扰理论

本书前三章讲了求解 KdV 方程、NLS 方程、MKdV 方程、SG 方程和 L-L 方程的反散射方法，得到了这些方程的性质上不全相同的孤子解．但是，在实际问题中，往往要讨论包含修正项的方程．这时，要严格地求解一般是不可能的．于是，当修正项可以作为小量时发展实用的微扰方法就成为必要．在线性方程时，如量子力学中那样，微扰方法是常见的．但是，在非线性方程时，有一些不同的地方，需要特别注意．这就是，在线性方程时，不含微扰项的方程的解，可作为含微扰的方程的 0 级近似．可是，在非线性方程的微扰方法中，这是不行的．如果这样作，则所得的 1 级微扰时的久期方程不存在正则解，结果是发散的．所以，在讨论含修正项的非线性方程的微扰方法时，要充分注意到这一点．对于含孤子的微扰方法，目前有好几种．本章讲述以反散射变换为基础的微扰方法，先详细讨论含修正项的 NLS 方程的微扰理论 (§59 至 §68)，然后再简短讨论含修正项的 KdV 方程的微扰理论 (§69 至 §75)．

§ 59 含修正项的 NLS 方程

考虑含修正项的 NLS 方程

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = i\varepsilon q[u], \tag{59.1}$$

式中 $q[u]$ 为 u 的泛函， ε 为一个小的实参数．当 ε 趋于 0 时，

方程过渡到通常的 NLS 方程，即不含修正项的 NLS 方程.

现在考虑在边值仍为 0 的条件

$$u(x,t) \to 0 \qquad 当\ |x| \to \infty\ 时 \tag{59.2}$$

下建立以 ε 为小参数的微扰方法. 显然应当要求，微扰方法给出的解，当 $\varepsilon \to 0$ 时，过渡到不含修正项的 NLS 方程的解.

我们现在回顾一下 NLS 方程的反散射解法的要点. 那里首先引入一对拉克斯方程，它们的相容性条件给出：u 满足 NLS 方程当且仅当谱参数 λ 独立于 t. 因此，在前面建立 NLS 方程的反散射解法时，我们用了谱参数 λ 独立于 t 的条件.

然而，在甚么地方用到这一条件呢？ 事实上，反散射法的建立先是单独从第一个拉克斯方程出发的. 由此引入了约斯特解，导出它们的解析性，渐近行为，从而建立反散射方程. 只是在最后确定散射数据随时间演化时才用到第二个拉克斯方程，用到谱参数独立于 t 的条件.

因此，以反散射变换为基础求解含修正项的 NLS 方程时，要保留求解 NLS 方程的反散射法中仍然好用的部分，自然希望保留第一个拉克斯方程. 但这时必需放弃第二个拉克斯方程. 否则一切都回到不含修正项的 NLS 方程的反散射解法去了，而和含修正项的 NLS 方程的求解无关.

既然保留了第一个拉克斯方程，那么约斯特解的引入，它们的解析性和渐近行为都与前面 NLS 方程时一样，反散射方程也保留原来同样的形式. 但是，散射数据

$$S(t) = \{r(t,\lambda),\, c_n(t),\, \lambda_n\}$$

随时间的演化需要另行设法求出. 只有确定了它，反散射方程定出的含修正项的方程的解才可以表为 t 的确定函数. 此时，散射数据的结果与不含修正项时的结果的差别只是 ε 阶的小量. 例如，此时的 λ_n 可以依赖于 t, 但只是 ε 阶的量.

从以上分析可见， 我们面对的问题是怎样才能决定散射数据随时间的演化，且所定出的这种与时间的关系使得反散射方程定出的 $u(x,t)$ 满足含修正项的 NLS 方程. 下面将看到，决定散射数据随时间的演化的出发点，正是含修正项的 NLS 方程本身.

既然放弃了第二个拉克斯方程，那么

$$\check{\phi}(x,\lambda) = \big\{\partial_t - M(x,\lambda)\big\}h(\lambda)\phi(x,\lambda) \tag{59.3}$$

就不再为 0. 这里将用到第 2 章的若干表示式，

$$L(x,t,\lambda) = -i\lambda\sigma_3 + U(x,t), \tag{59.4}$$

$$M(x,t,\lambda) = -i2\lambda^2\sigma_3 + 2\lambda U(x,t) - i\{U^2(x,t) + U_x(x,t)\}\sigma_3 \tag{59.5}$$

和

$$h(t,\lambda) = e^{-i2\lambda^2 t}. \tag{59.6}$$

由于版面的关系，我们将略去宗量 t, 如用 $h(\lambda)$ 代替 $h(t,\lambda)$. 如果以算子 $\{\partial_x - L(x,\lambda)\}$ 作用于它，就得到

$$\begin{aligned}&\big\{\partial_x - L(x,\lambda)\big\}\check{\phi}(x,\lambda)\\&= \big\{\partial_x\partial_t - M\partial_x - M_x - L\partial_t + LM\big\}h(\lambda)\phi(x,\lambda).\end{aligned} \tag{59.7}$$

将上式右端第一项中的微商交换次序，利用第一个拉克斯方程，右端成为

$$\big\{L_t - M_x + [L,M]\big\}h(\lambda)\phi(x,\lambda). \tag{59.8}$$

由于这时要保留 λ_t, 式中括号成为

$$\{U_t - M_x + [L,M]\} + \{-i\lambda_t\sigma_3\}. \tag{59.9}$$

前一括号正是

$$U_t + iU_{xx}\sigma_3 - i2U^3\sigma_3. \tag{59.10}$$

将 (59.9) 的两个括号分别减和加 $\varepsilon Q[u]$, 这里

$$Q[u] = \begin{pmatrix} 0 & q[u] \\ -\overline{q[u]} & 0 \end{pmatrix}, \tag{59.11}$$

于是 (59.9) 化为

$$\{U_t - M_x + [L,M] - \varepsilon Q\} + \{-i\lambda_t\sigma_3 + \varepsilon Q\}. \tag{59.12}$$

前一个括号为 0, 即

$$U_t + iU_{xx}\sigma_3 - i2U^3\sigma_3 - \varepsilon Q = 0, \tag{59.13}$$

就是含修正项的 NLS 方程. 代入 (59.7), 得

$$\{\partial_x - L(x,\lambda)\}\check{\phi}(x,\lambda) = G(x,\lambda)h(\lambda)\phi(x,\lambda), \tag{59.14}$$

式中

$$G(x,\lambda) = -i\lambda_t\sigma_3 + \varepsilon Q(x), \tag{59.15}$$

或者

$$G = \begin{pmatrix} -i\lambda_t & \varepsilon q \\ -\varepsilon\bar{q} & i\lambda_t \end{pmatrix}. \tag{59.16}$$

由以上的推演可见, (59.13) 和 (59.14) 是互为条件的: (59.13) 成立, 即 (59.1) 成立, 则 (59.14) 成立, 反之亦然. 这就是说, u 满足含修正项的 NLS 方程 (59.1), 则 (59.14) 将决定所需的散射数据随时间的演化. 反之, 若 (59.14) 定出了所需的散射数据随时间的演化, 则代入反散射方程定出的解后, 解将满足含修正项的 NLS 方程. 在建立含修正项的 NLS 方程的微扰理论时, 我们由 (59.14) 出发.

§ 60 以反散射变换为基础的微扰方法

为了由 (59.14) 确定散射数据随时间的演化, 先看它的边值. 由 (59.2), 当 $x \to -\infty$ 时,

$$\partial_t - M(x,\lambda) \to \partial_t + i2\lambda^2\sigma_3 \tag{60.1}$$

和

$$\phi(x,\lambda)\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}. \tag{60.2}$$

注意 σ_3 此时的作用等于 1 和 (59.4), 于是，在此极限下，

$$\check{\phi}(x,\lambda)\to\left\{\partial_t+i2\lambda^2\right\}h(\lambda)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}=0. \tag{60.3}$$

当 $x\to\infty$ 时，也有 (60.1), 但由 (14.15), 有

$$\phi(x,\lambda)\to a(\lambda)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}+b(\lambda)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}. \tag{60.4}$$

注意含修正项时 $a(\lambda)$ 等与 t 有关. 所以

$$\check{\phi}(x,\lambda)\to\left\{\partial_t+i2\lambda^2\right\}h(\lambda)a(\lambda)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}$$

$$+\left\{\partial_t-i2\lambda^2\right\}h(\lambda)b(\lambda)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}. \tag{60.5}$$

也就是

$$\check{\phi}(x,\lambda)\to h(\lambda)a_t(\lambda)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}$$

$$+h(\lambda)\left\{b_t(\lambda)-i4\lambda^2b(\lambda)\right\}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}. \tag{60.6}$$

另一方面， (59.14) 是一个非齐次方程，它的解一般可以表为相应的齐次方程的两个解的组合. 我们写下

$$\check{\phi}(x,\lambda)=\alpha(x,\lambda)\psi(x,\lambda)+\beta(x,\lambda)\phi(x,\lambda). \tag{60.7}$$

将它代入 (59.14), 得到

$$\alpha_x(x,\lambda)\psi(x,\lambda)+\beta_x(x,\lambda)\phi(x,\lambda)=G(x,\lambda)h(\lambda)\phi(x,\lambda). \tag{60.8}$$

以

$$\big(-\phi_2(x,\lambda),\ \phi_1(x,\lambda)\big) = i\phi(x,\lambda)^T\sigma_2$$

左乘 (60.8), 注意 $a(\lambda)$ 的表示式， (14.31), 得到

$$\alpha_x(x,\lambda) = ia(\lambda)^{-1}\phi(x,\lambda)^T\sigma_2 G(x,\lambda)h(\lambda)\phi(x,\lambda). \tag{60.9}$$

以

$$\big(-\psi_2(x,\lambda),\ \psi_1(x,\lambda)\big) = i\psi(x,\lambda)^T\sigma_2$$

左乘 (60.8), 则得到

$$\beta_x(x,\lambda) = -ia(\lambda)^{-1}\psi(x,\lambda)^T\sigma_2 G(x,\lambda)h(\lambda)\phi(x,\lambda). \tag{60.10}$$

将上两式对 x 从 $-\infty$ 到 x 积分，注意在 $-\infty$ 处的为 0 的边界条件 (60.3), 得

$$\alpha(x,\lambda) = i\frac{h(\lambda)}{a(\lambda)}\int_{-\infty}^{x}\phi(y,\lambda)^T\sigma_2 G(y,\lambda)\phi(y,\lambda)\,dy \tag{60.11}$$

和

$$\beta(x,\lambda) = -i\frac{h(\lambda)}{a(\lambda)}\int_{-\infty}^{x}\psi(y,\lambda)^T\sigma_2 G(y,\lambda)\phi(y,\lambda)\,dy. \tag{60.12}$$

将 (60.7) 取 $x\to\infty$ 的极限，即

$$\begin{aligned}\check{\phi}(\infty,\lambda) &\to \alpha(\infty,\lambda)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}\\ &+\beta(\infty,\lambda)\left\{a(\lambda)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\lambda x}+b(\lambda)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\lambda x}\right\}.\end{aligned} \tag{60.13}$$

与 (60.6) 比较，得

$$h(\lambda)a_t(\lambda) = \beta(\infty,\lambda)a(\lambda) \tag{60.14}$$

和

$$h(\lambda)\big\{b_t(\lambda) - i4\lambda^2 b(\lambda)\big\} = \alpha(\infty,\lambda) + \beta(\infty,\lambda)b(\lambda). \tag{60.15}$$

以 (60.11) 和 (60.12) 代入 (60.14), 得

$$a_t(\lambda) = i \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,\lambda)^T \sigma_2 G(\lambda) \phi(x,\lambda)\, dx \tag{60.16}$$

和

$$\begin{aligned} & b_t(\lambda) - i4\lambda^2 b(\lambda) \\ & \quad = ia(\lambda)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\phi(\lambda) - b(\lambda)\psi(\lambda)\right\}^T \sigma_2 G(\lambda)\phi(\lambda)\, dx. \end{aligned} \tag{60.17}$$

这两式就是含修正项的 NLS 方程的以反散射方法为基础的微扰方法的基本方程.

我们立即看到, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, 有 $G(x,\lambda) \to 0$, 这样就得到

$$a_t(\lambda) = 0 \tag{60.18}$$

和

$$b_t(\lambda) - i4\lambda^2 b(\lambda) = 0. \tag{60.19}$$

这正是不含修正项时的 NLS 方程时应有的结果.

对于散射态解, 即对于 λ 的连续谱的情况, 入射波和散射波有同样的波数. 这时, λ 不依赖于 t, 即 $\lambda_t = 0$. 这与量子力学中的情况一样. 因此, 这时有

$$G(x,\lambda) = \varepsilon Q(x). \tag{60.20}$$

由 $r(\lambda) = b(\lambda)/a(\lambda)$, 得

$$r_t(\lambda) = \frac{b_t(\lambda)}{a(\lambda)} - b(\lambda)\frac{a_t(\lambda)}{a(\lambda)^2}, \tag{60.21}$$

以 (60.16) 和 (60.17) 代入, 得

$$r_t(\lambda) - i4\lambda^2 r(\lambda) = i\frac{\varepsilon}{a(\lambda)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,\lambda)^T \sigma_2 Q(x) \phi(x,\lambda)\, dx. \tag{60.22}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，又给出 NLS 方程相应的结果.

§ 61 λ_n 随时间的演化

对于束缚态，谱参数 λ_n 的值将随时间发生变化. 但由于是束缚态，仍应当有

$$a(\lambda_n) = 0 \tag{61.1}$$

和

$$\phi(x, \lambda_n) = b_n(t)\psi(x, \lambda_n). \tag{61.2}$$

又由于这两式对任何 t 也应当成立，所以又有

$$a_t(\lambda_n) = 0. \tag{61.3}$$

这些条件就是说微扰项并不改变散射问题的束缚态解， 也就是，不改变非线性问题的孤子解，即微扰项足够小. (60.16) 中的函数都可以解析延拓到复 λ 的上半平面，所以在 $\lambda \to \lambda_n$ 时的极限成立. 以上式代入，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, \lambda_n)^T \sigma_2 G(x, \lambda_n)\phi(x, \lambda_n)\, dx = 0. \tag{61.4}$$

由于

$$G(x, \lambda_n) = -i\lambda_{nt}\sigma_3 + \varepsilon Q(x), \tag{61.5}$$

上式化为

$$\lambda_{nt} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x, \lambda_n)\phi_2(x, \lambda_n) + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, \lambda_n)^T \sigma_2 Q(x)\phi(x, \lambda_n)\, dx = 0. \tag{61.6}$$

这里我们注意，自然不应将只适用于连续谱的结果 (60.20) 先行代入. 为弄清问题的实质，我们再用下列方法直接证明 (61.4).

将方程 (59.13) 和 (59.14) 在 $\lambda \to \lambda_n$ 时写下,

$$\{\partial_x - L(x,\lambda_n)\}\check{\phi}(x,\lambda_n) = G(x,\lambda_n)h(\lambda_n)\phi(x,\lambda_n), \tag{61.7}$$

式中

$$G(x,\lambda_n) = -i\lambda_{nt}\sigma_3 + \varepsilon Q(x). \tag{61.8}$$

以 $\phi(x,\lambda_n)^T\sigma_2$ 左乘 (61.7), 再积分，将所得之式的左端第一项作分部积分，注意束缚态时的 $\phi(x,\lambda_n)$ 不单在 $x\to-\infty$ 时趋于 0, 而且在 $x\to\infty$ 时趋于 0. 这样，左端就化为

$$-i\int_{-\infty}^{\infty}\{\partial_x\phi(x,\lambda_n)^T\sigma_2 + \phi(x,\lambda_n)^T\sigma_2 L(x,\lambda_n)\}\check{\phi}(x,\lambda_n)\,dx. \tag{61.9}$$

但是，将 $\phi(x,\lambda_n)$ 满足的第一个拉克斯方程取转置，再以 σ_2 右乘，注意

$$\sigma_2 L(x,\lambda)^T\sigma_2 = -L(x,\lambda), \tag{61.10}$$

可见，(61.9) 的被积函数中的括号为 0, 因而 (61.9) 为 0. 于是得到以上积分式的左端为 0. 这样就直接得到了 (61.6).

(60.6) 可以进一步简化. 将第一个拉克斯方程在 λ 时，和在 λ_n 时的两式相减，得

$$\begin{aligned}&\partial_x\{\phi_1(x,\lambda)\phi_2(x,\lambda_n) - \phi_2(x,\lambda)\phi_1(x,\lambda_n)\}\\ &\quad= -i(\lambda-\lambda_n)\{\phi_1(x,\lambda)\phi_2(x,\lambda_n) + \phi_2(x,\lambda)\phi_1(x,\lambda_n)\}.\end{aligned} \tag{61.11}$$

对 λ 取微商，再取 $\lambda = \lambda_n$, 就得到

$$\partial_x\{\dot{\phi}_1\phi_2 - \dot{\phi}_2\phi_1\} = -i2\phi_1\phi_2. \tag{61.12}$$

积分，得

$$\dot{\phi}_1\phi_2 - \dot{\phi}_2\phi_1 = -i2\int_{-\infty}^{x}\phi_1\phi_2\,dy. \tag{61.13}$$

类似地，得到

$$\partial_x\{\dot{\psi}_1\psi_2 - \dot{\psi}_2\psi_1\} = -i2\psi_1\psi_2. \tag{61.14}$$

积分，得

$$\dot{\psi}_1\psi_2 - \dot{\psi}_2\psi_1 = i2\int_x^\infty \psi_1\psi_2\,dy. \tag{61.15}$$

注意 $a(\lambda)$ 的表示式及 (61.2), 得

$$\dot{a}(\lambda_n) = b_n(t)^{-1}\big(\dot{\phi}_1\phi_2 - \dot{\phi}_2\phi_1\big) + b_n(t)\big(\dot{\psi}_1\psi_2 - \dot{\psi}_2\psi_1\big). \tag{61.16}$$

将 (61.13) 和 (61.14) 代入，得

$$\dot{a}(\lambda_n) = -i2\int_{-\infty}^\infty \phi_1(x,\lambda_n)\phi_2(x,\lambda_n)\,dx. \tag{61.17}$$

于是， (61.6) 改写作

$$\dot{a}(\lambda_n)\lambda_{nt} = -\frac{\varepsilon}{b_n(t)}\int_{-\infty}^\infty \big\{q(x)\phi_2^2(x,\lambda_n) + \overline{q(x)}\phi_1^2(x,\lambda_n)\big\}\,dx. \tag{61.18}$$

它表明，当存在修正项时，谱参数 λ_n 如何随时间演化. 在 $\varepsilon \to 0$ 的极限时，显然有 $\lambda_{nt} = 0$. 这正是不含修正项的 NLS 方程的结果.

§ 62 $b_n(t)$ 随时间的演化

我们的出发点是 (61.2). 既然 $\phi(x,\lambda_n)$ 和 $\psi(x,\lambda_n)$ 随时间的演化是完全确定了的，所以它们的比例 $b_n(t)$ 随时间的演化也应当是完全确定了的. 类似于 (59.3), 引入

$$\check{\psi}(x,\lambda_n) = \big\{\partial_t - M(x,\lambda_n)\big\}h(\lambda_n)^{-1}\psi(x,\lambda_n). \tag{62.1}$$

再将 (61.2) 写成

$$h(\lambda_n)\phi(x,\lambda_n) = h(\lambda_n)^2 b_n(t)h(\lambda_n)^{-1}\psi(x,\lambda_n). \tag{62.2}$$

以算子 $\{\partial_t - M(x,\lambda_n)\}$ 作用，得

$$\check{\phi}(x,\lambda_n) = h(\lambda_n)^2 b_n(t)\check{\psi}(x,\lambda_n)$$

$$+ h(\lambda_n)\big\{b_{nt}(t) - i4\lambda_n^2 b_n(t)\big\}\psi(x,\lambda_n), \qquad (62.3)$$

我们看到，当 $\varepsilon \to 0$ 时，由于 $\check{\phi}(x,\lambda_n)$ 和 $\check{\psi}(x,\lambda_n)$ 均趋于 0,(62.3) 给出不含修正项的 NLS 方程时的 $b_n(t)$ 对时间的相依的原有结果.

现在来看 (60.7). 由于式中各项都可以解析地延拓到复 λ 的上半平面，当 $\lambda = \lambda_n$ 时，右端两项因 (61.2) 的比例关系，可以只保留一项. 譬如，保留第二项，这相当重新定义 $\beta(x,\lambda_n)$, 即

$$\check{\phi}(x,\lambda_n) = \beta(x,\lambda_n)\phi(x,\lambda_n). \qquad (62.4)$$

于是

$$\beta_x(x,\lambda_n)\phi(x,\lambda_n) = G(x,\lambda_n)h(\lambda_n)\phi(x,\lambda_n). \qquad (62.5)$$

注意 $a(\lambda)$ 的表示式 (14.31), 有

$$\dot{a}(\lambda_n) = i\big\{b_n(t)^{-1}\dot{\phi}(x,\lambda_n) - \dot{\psi}(x,\lambda_n)\big\}^T \sigma_2 \phi(x,\lambda_n), \qquad (62.6)$$

或

$$\dot{a}(\lambda_n) = i\big\{\dot{\phi}(x,\lambda_n) - b_n(t)\dot{\psi}(x,\lambda_n)\big\}^T \sigma_2 \psi(x,\lambda_n). \qquad (62.7)$$

以 $i\{b_n(t)^{-1}\dot{\phi}(x,\lambda_n) - \psi(x,\lambda_n)\big\}^T\sigma_2$ 左乘 (62.5), 得

$$\beta_x(x,\lambda_n)\dot{a}(\lambda_n) = i\frac{h(\lambda_n)}{b_n(t)}\big\{\dot{\phi}(x,\lambda_n) - b_n(t)\psi(x,\lambda_n)\big\}^T \cdot \sigma_2 G(x,\lambda_n)\phi(x,\lambda_n). \qquad (62.8)$$

再积分，得

$$\beta(x,\lambda_n) = i\frac{h(\lambda_n)}{\dot{a}(\lambda_n)b_n(t)}\int_{-\infty}^{x}\big\{\dot{\phi}(y,\lambda_n) - b_n(t)\psi(y,\lambda_n)\big\}^T \cdot \sigma_2 G(y,\lambda_n)\phi(y,\lambda_n)\,dy, \qquad (62.9)$$

对于 $\check{\psi}(x,\lambda_n)$, 也可以得到

$$\big\{\partial_x - L(x,\lambda_n)\big\}\check{\psi}(x,\lambda_n) = G(x,\lambda_n)h(\lambda_n)^{-1}\psi(x,\lambda_n). \qquad (62.10)$$

同样的手续，以

$$\check{\psi}(x,\lambda_n)=\gamma(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda_n) \tag{62.11}$$

代入，得

$$\gamma_x(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda_n)=G(x,\lambda_n)h(\lambda_n)^{-1}\psi(x,\lambda_n). \tag{62.12}$$

以 $i\{b_n(t)^{-1}\dot{\phi}(x,\lambda_n)-\psi(x,\lambda_n)\}^T\sigma_2$ 左乘 (62.5), 得

$$\gamma_x(x,\lambda_n)\dot{a}(\lambda_n)=-i\frac{1}{h(\lambda_n)b_n(t)}\{\dot{\phi}(x,\lambda_n)-b_n(t)\psi(x,\lambda_n)\}^T \cdot\sigma_2G(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda_n), \tag{62.13}$$

积分，得

$$\gamma(x,\lambda_n)=i\frac{1}{h(\lambda_n)\dot{a}(\lambda_n)b_n(t)}\int_x^\infty\{\dot{\phi}(y,\lambda_n)-b_n(t)\psi(y,\lambda_n)\}^T \cdot\sigma_2G(y,\lambda_n)\phi(y,\lambda_n)\,dy. \tag{62.14}$$

将 (62.8) 代入 (62.4) 得到 $\check{\phi}(x,\lambda_n)$, 将 (62.14) 代入 (62.11) 得到 $\check{\psi}(x,\lambda_n)$, 在所得的式子代入 (62.2), 消去相同的因子后，得到

$$b_{nt}(t)-i4\lambda_n^2b_n(t)=\frac{i}{\dot{a}(\lambda_n)}\int_{-\infty}^\infty\{\dot{\phi}(\lambda_n)-b_n(t)\dot{\psi}(\lambda_n\} \cdot\sigma_2G(\lambda_n)\phi(\lambda_n)\,dx. \tag{62.15}$$

这样，我们就得到以反散射方法为基础的微扰理论的 $b_n(t)$ 随时间变化的基本方程.

现在对 $b_n(t)$ 的基本方程进行简化. 积分中的 $G(x,\lambda_n)$ 由两项构成. 现在来证明前一部分 (即 $-i\lambda_{nt}$, 所引起的积分) 为 0,

$$\int_{-\infty}^\infty\{\dot{\phi}(\lambda_n)-b_n(t)\dot{\psi}(\lambda_n)\}^T\sigma_2i\sigma_3\phi(\lambda_n)\,dx=0 \tag{62.16}$$

由第一个拉克斯方程，不难得到

$$\{\partial_x+i\lambda_n\sigma_3-U\}\dot{\phi}(\lambda_n)=i\sigma_3\phi(\lambda_n), \tag{62.17}$$

和

$$\{\partial_x + i\lambda_n\sigma_3 - U\}\dot{\psi}(\lambda_n) = i\sigma_3\psi(\lambda_n). \tag{62.18}$$

以 $i\dot{\psi}(\lambda_n)^T\sigma_2$ 和 $i\dot{\psi}(\lambda_n)^T\sigma_2$ 分别左乘上两式，再相加，得左端为

$$\partial_x\{\dot{\psi}_2(\lambda_n)\dot{\phi}_1(\lambda_n) - \dot{\psi}_1(\lambda_n)\dot{\phi}_2(\lambda_n)\}. \tag{62.19}$$

将它对 x 从 $-\infty$ 到 ∞ 积分，在束缚态的情况下，显然结果为 0. 由此推得，右端在积分后也为 0, 即

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\{\dot{\psi}(\lambda_n)^T\sigma_2 i\sigma_3\phi(\lambda_n) - \dot{\phi}(\lambda_n)^T\sigma_2 i\sigma_3\psi(\lambda_n)\}\,dx = 0. \tag{62.20}$$

以 (61.2) 替换第一项的最后因子，即见上式化为 (62.16). 这样，我们就得到 $b_n(t)$ 随时间变化的最终方程，

$$b_n(t) - i4\lambda_n^2 b_n(t) = \frac{i\,\varepsilon}{\dot{a}(\lambda_n)}\int_{-\infty}^{\infty}\{\dot{\phi}(\lambda_n) - b_n(t)\dot{\psi}(\lambda_n)\}^T \cdot \sigma_2 Q\phi(\lambda_n)\,dx. \tag{62.21}$$

也就是

$$b_{nt}(t) - i4\lambda_n^2 b_n(t) = -\frac{\varepsilon}{\dot{a}(\lambda_n)}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\big[\dot{\phi}_1(\lambda_n) - b_n(t)\dot{\psi}_1(\lambda_n)\big]\phi_1(\lambda_n)\bar{q} + \big[\dot{\phi}_2(\lambda_n) - b_n(t)\dot{\psi}_2(\lambda_n)\big]\phi_2(\lambda_n)q\Big\}\,dx. \tag{62.22}$$

显然，当 $\varepsilon \to 0$ 时，它退化到不含修正项时的 NLS 方程的结果.

§ 63　守恒律的微扰修正

当不存在修正项时， NLS 方程有无穷多个守恒律. 我们回忆一下导出它们的手续. 按反散射方法，得到 (25.3), 即

$$\ln a(\lambda) = \hat{\phi}(\infty, \lambda). \tag{63.1}$$

将此式右端对 λ^{-1} 展开，得 (25.4), 即

$$\hat{\phi}(\infty, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{I_j}{(i2\lambda)^j}, \tag{63.2}$$

式中 (见 (25.5))

$$I_j = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_j(x)\, dx, \tag{63.3}$$

这里被积函数 $\mu_j(x)$ 是 $u(x)$、$\overline{u(x)}$ 和它们对 x 的微商的多项式.

由于不存在修正项时 $a(\lambda)$ 是守恒的，因而 (63.2) 的左端独立于 t. 这样，它的右端按 λ 展开的无穷多个项也独立于 t, 即无穷多个守恒律.

我们看到，

$$\frac{d}{dt} I_j = 0. \tag{63.4}$$

这是必有某种 "荷" 和 "流", 分别以 $\mu_j(x)$ 和 ν_j 表示，使得

$$\partial_t \mu_j(x) + \partial_x \nu_j(x) = 0, \tag{63.5}$$

这里 $\nu_j(x)$ 也是 $u(x)$、$\overline{u(x)}$ 和它们对 x 的微商的多项式. 譬如，对应于

$$\mu_1(x) = u(x)\overline{u(x)}, \tag{63.6}$$

利用 NLS 方程，容易得到

$$\nu_1(x) = i\{u_x(x)\overline{u(x)} - u(x)\overline{u_x(x)}\}. \tag{63.7}$$

对于含修正项的 NLS 方程，由于保留了第一个拉克斯方程，因此 (63.1)—(63.3) 仍是成立的. 这时 $a(\lambda)$ 不独立于 t, 因而，$\frac{d}{dt}I_j$ 不再为 0, 而是一个 ε 阶的量. 它表示修正项的存在对原来的守恒律的修正.

可用不同的方式导出这种含修正项时的表示式. 将含修正项的 NLS 方程写作

$$u_t = S[u] + \varepsilon q[u], \tag{63.8}$$

这里

$$S[u] = iu_{xx} + i|u|^2u. \tag{63.9}$$

利用泛函微商，得

$$\frac{d}{dt}I_j = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\delta I_j}{\delta u(x)}\frac{d}{dt}u(x) + \frac{\delta I_j}{\delta \overline{u(x)}}\frac{d}{dt}\overline{u(x)}\right\}dx. \tag{63.10}$$

以 (63.8) 代入，得

$$\frac{d}{dt}I_j = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\delta I_j}{\delta u(x)}S[u(x)] + \frac{\delta I_j}{\delta \overline{u(x)}}\overline{S[u(x)]}\right\}dx$$
$$+\ \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\delta I_j}{\delta u(x)}q[u(x)] + \frac{\delta I_j}{\delta \overline{u(x)}}\overline{q[u(x)]}\right\}dx. \tag{63.11}$$

右端第一个积分的被积函数必然是一个散度项．因为，对不含修正项的 NLS 方程，我们刚刚得到这一结果．当 $\varepsilon \neq 0$ 时， $S[u]$ 和 $I_j[u]$ 还是不显含 ε, 所以右端第一项仍然是一个散度项的积分，因而为 0. 于是我们得到

$$\frac{d}{dt}I_j = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\delta I_j}{\delta u(x)}q[u(x)] + \frac{\delta I_j}{\delta \overline{u(x)}}\overline{q[u(x)]}\right\}dx. \tag{63.12}$$

这一式给出，当 $\varepsilon \neq 0$ 时， $\frac{d}{dt}I_j$ 如何随 ε 而变化．它们是含修正项的 NLS 方程的近似守恒律．

§ 64 绝热近似解

现在将以上所得的关于含修正项的 NLS 方程的微扰方法用来处理一个简单情况，即当透射振幅只有一个简单极点 $\lambda = \lambda_1$ 的情况．在不涉及散射数据随时间的演化时，可以直接将第 2 章

的 §19 的结果拿过来. 在无反射时, 萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程 (17.13) 简化为 (19.2) 和 (19.3), 即

$$\tilde{\psi}_1(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}+i\frac{1}{\lambda-\lambda_1}c_1\psi_1(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x}e^{-i\lambda x} \tag{64.1}$$

和

$$\tilde{\psi}_2(x,\lambda)=i\frac{1}{\lambda-\lambda_1}c_1\psi_2(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x}e^{-i\lambda x}. \tag{64.2}$$

由 (14.21), 这也就是

$$\overline{\psi_2(x,\lambda)}=e^{-i\bar{\lambda}x}+i\frac{1}{\bar{\lambda}-\lambda_1}c_1\psi_1(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x}e^{-i\bar{\lambda}x} \tag{64.3}$$

和

$$\psi_1(x,\lambda)=i\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}_1}\bar{c}_1\overline{\psi_2(x,\lambda_1)}e^{-i\bar{\lambda}_1 x}e^{i\lambda x}. \tag{64.4}$$

取 $\lambda=\lambda_1$, 得

$$\overline{\psi_2(x,\lambda_1)}=e^{-i\bar{\lambda}_1 x}+i\frac{1}{\bar{\lambda}_1-\lambda_1}c_1\psi_1(x,\lambda_1)e^{i(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)x} \tag{64.5}$$

和

$$\psi_1(x,\lambda_1)=i\frac{1}{\lambda_1-\bar{\lambda}_1}\bar{c}_1\overline{\psi_2(x,\lambda_1)}e^{i(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)x}. \tag{64.6}$$

这两式是包含待求的量 $\psi_1(x,\lambda_1)$ 和 $\tilde{\psi}_2(x,\lambda)$ 的线代数方程组. 由克莱姆法则容易得到

$$\overline{\psi_2(x,\lambda_1)}=\frac{1}{\Delta}e^{-i\bar{\lambda}_1 x} \tag{64.7}$$

和

$$\psi_1(x,\lambda_1)=\frac{1}{\Delta}i\frac{1}{\lambda_1-\bar{\lambda}_1}\bar{c}_1e^{i(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)x}e^{-i\bar{\lambda}_1 x}, \tag{64.8}$$

式中

$$\Delta=1+\frac{1}{|\bar{\lambda}_1-\lambda_1|^2}|c_1|^2e^{i2(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)x}. \tag{64.9}$$

在 (19.10) 中引入了记号

$$f_1^2 = i\frac{c_1}{\bar{\lambda}_1 - \lambda_1}e^{i2\lambda_1 x}. \tag{64.10}$$

代回到 (19.1) 和 (19.2), 得

$$\overline{\psi_2(x,\lambda)} = e^{-i\bar{\lambda}x} + \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda} - \lambda_1}\frac{|f_1|^4}{1+|f_1|^4}e^{-i\bar{\lambda}x} \tag{64.11}$$

和

$$\psi_1(x,\lambda) = \frac{\bar{\lambda}_1 - \lambda_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1}\frac{\overline{f_1^2}}{1+|f_1|^4}e^{i\lambda x}. \tag{64.12}$$

对 (64.11) 取复共轭，得

$$\psi_2(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \frac{\bar{\lambda}_1 - \lambda_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1}\frac{|f_1|^4}{1+|f_1|^4}e^{i\lambda x}. \tag{64.13}$$

利用关系 (14.21), 得

$$\tilde{\psi}_1(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \frac{\lambda_1 - \bar{\lambda}_1}{\lambda - \lambda_1}\frac{|f_1|^4}{1+|f_1|^4}e^{-i\lambda x} \tag{64.14}$$

和

$$\tilde{\psi}_2(x,\lambda) = -\frac{(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)}{\lambda - \lambda_1}\frac{f_1^2}{1+|f_1|^4}e^{-i\lambda x}. \tag{64.15}$$

由于此时

$$a(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1}, \tag{64.16}$$

注意 (17.10) 和 (17.21), 可见 (64.10) 也就是

$$f_1^2 = -b_1 e^{i2\lambda_1 x}. \tag{64.17}$$

引入记号

$$f_1^2 = e^{i\varphi_1}e^{-Z}, \tag{64.19}$$

在不含修正项时

$$\varphi_1 = 2\mu_1 x + 4(\mu_1^2 - \nu_1^2)t + \phi_{n0}, \tag{64.20}$$

$$Z = 2\nu_1(x - x_1 + 4\mu_1 t), \tag{64.21}$$

这里用 Z 代替了 (19.29) 中的 θ_1. 代入，得 1- 孤子解为

$$u(x) = 2\nu \operatorname{sech} Z\, e^{-i\varphi}, \tag{64.22}$$

而约斯特解等就写作

$$\psi_1(x,\lambda) = -i\frac{e^{i\lambda x}}{\lambda - \mu + i\nu}\,\nu \operatorname{sech} Z\, e^{-i\varphi}, \tag{64.23}$$

$$\psi_2(x,\lambda) = \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda - \mu + i\nu}\big(\lambda - \mu + i\nu \operatorname{th} Z\big), \tag{64.24}$$

$$\tilde{\psi}_1(x,\lambda) = \frac{e^{-i\lambda x}}{\lambda - \mu - i\nu}\big(\lambda - \mu - i\nu \operatorname{th} Z\big), \tag{64.25}$$

$$\tilde{\psi}_2(x,\lambda) = -i\frac{e^{-i\lambda x}}{\lambda - \mu - i\nu}\,\nu \operatorname{sech} Z\, e^{i\varphi}, \tag{64.26}$$

$$\phi_1(x,\lambda) = \frac{e^{-i\lambda x}}{\lambda - \mu + i\nu}\big(\lambda - \mu - i\nu \operatorname{th} Z\big), \tag{64.27}$$

$$\phi_2(x,\lambda) = -i\frac{e^{-i\lambda x}}{\lambda - \mu + i\nu}\,\nu \operatorname{sech} Z\, e^{i\varphi}, \tag{64.28}$$

$$\tilde{\phi}_1(x,\lambda) = -i\frac{e^{i\lambda x}}{\lambda - \mu - i\nu}\,\nu \operatorname{sech} Z\, e^{-i\varphi}, \tag{64.29}$$

$$\tilde{\phi}_2(x,\lambda) = \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda - \mu - i\nu}\big(\lambda - \mu + i\nu \operatorname{th} Z\big). \tag{64.30}$$

在不含修正项时，已经知道 Z 和 φ_1 的表示式 (64.20) 和 (64.21)，这时

$$-b_1 = e^{i4\lambda_1^2 t} e^{2\nu_1 x_1} e^{i\varphi_{10}}. \tag{64.31}$$

但是，当存在修正项时，散射数据对时间的演化应由前几节的公式来计算. 这时，λ_1 将依赖于时间 t, 为 ε 一级，$b_1(t)$ 除了

原来的对时间 t 的依赖之外，还有一个 ε 一级的修正. 这时所得的解 $u(x,t)$ 通常以 $u^a(x,t)$ 来表示，称为含修正项的 NLS 方程的绝热近似解. 我们注意， $u^a(x,t)$ 的函数形式如同不含修正项的 NLS 方程的单孤子解那样，但是其中所含的参数却按含修正项的 NLS 方程的散射数据随时间的演化来决定. 因此，它对修正项的影响并未全面考虑进来，只包含效应的一部分. 所以， $u^a(x,t)$ 既不是不含修正项的 NLS 方程的解，也不是含修正项的方程的 ε 一级近似解. 它是含修正项的 NLS 方程的 ε 一级近似解的一部分. 同理， 这样得到的约斯特解 $\psi(x,t,\lambda)$ 以 $\psi^a(x,t,\lambda)$ 来表示. 但为简化记号，以下只在必要时才加上上标 a.

§ 65 谱参数的缓慢变化

为了便于计算，对有关的公式先形式上作一些改变. 在不引起误解时，略去下标 1. 引入

$$Z=2\nu(x-\xi), \tag{65.1}$$

而将 φ_1 写作

$$\varphi=\frac{\mu}{\nu}Z+\delta. \tag{65.2}$$

这时 $b_1(t)$ 为

$$b_1=e^{-i(2\mu\xi-\delta+\pi)}e^{2\nu\xi}. \tag{65.3}$$

这里， ξ 和 δ 当不存在修正项时，也就是在准至 $O(\varepsilon)$ 时，有

$$\frac{d}{dt}\xi=-4\mu,\quad \frac{d}{dt}\delta=-4(\mu^2+\nu^2). \tag{65.4}$$

我们又有

$$\psi_1(x,\lambda_1)=-\frac{1}{2}e^{i\lambda_1 x}\operatorname{sech}Z\,e^{-i\varphi}, \tag{65.5}$$

$$\psi_2(x,\lambda_1) = \frac{1}{2}e^{i\lambda_1 x}\operatorname{sech} Z\, e^{Z}, \tag{65.6}$$

$$\tilde{\psi}_1(x,\bar{\lambda}_1) = \frac{1}{2}e^{-i\bar{\lambda}_1 x}\operatorname{sech} Z\, e^{Z}, \tag{65.7}$$

$$\tilde{\psi}_2(x,\bar{\lambda}_1) = \frac{1}{2}e^{-i\bar{\lambda}_1 x}\operatorname{sech} Z\, e^{i\varphi}, \tag{65.8}$$

$$\phi_1(x,\lambda_1) = \frac{1}{2}e^{-i\lambda_1 x}\operatorname{sech} Z\, e^{-Z}, \tag{65.9}$$

$$\phi_2(x,\lambda_1) = -\frac{1}{2}e^{-i\lambda_1 x}\,\nu\operatorname{sech} Z\, e^{i\varphi}, \tag{65.10}$$

$$\tilde{\phi}_1(x,\bar{\lambda}_1) = \frac{1}{2}e^{i\bar{\lambda}_1 x}\,\nu\operatorname{sech} Z\, e^{-i\varphi}, \tag{65.11}$$

$$\tilde{\phi}_2(x,\bar{\lambda}_1) = \frac{1}{2}e^{i\bar{\lambda}_1 x}\operatorname{sech} Z\, e^{-Z}. \tag{65.12}$$

为以下的应用，还需要

$$\dot{\psi}_1(x,\lambda_1) = i\left(x+\frac{1}{2\nu}\right)\psi_1(x,\lambda_1), \tag{65.13}$$

$$\dot{\psi}_2(x,\lambda_1) = i\left(x+\frac{1}{2\nu}\right)\psi_2(x,\lambda_1) - i\frac{1}{2\nu}\,e^{i\lambda_1 x}, \tag{65.14}$$

$$\dot{\tilde{\psi}}_1(x,\bar{\lambda}_1) = -i\left(x+\frac{1}{2\nu}\right)\tilde{\psi}_1(x,\bar{\lambda}_1) + i\frac{1}{2\nu}e^{-i\bar{\lambda}_1 x}, \tag{65.15}$$

$$\dot{\tilde{\psi}}_2(x,\bar{\lambda}_1) = -i\left(x+\frac{1}{2\nu}\right)\tilde{\psi}_2(x,\bar{\lambda}_1), \tag{65.16}$$

$$\dot{\phi}_1(x,\lambda_1) = -i\left(x-\frac{1}{2\nu}\right)\phi_1(x,\lambda_1) - i\frac{1}{2\nu}e^{-i\lambda_1 x}, \tag{65.17}$$

$$\dot{\phi}_2(x,\lambda_1) = -i\left(x-\frac{1}{2\nu}\right)\phi_2(x,\lambda_1), \tag{65.18}$$

$$\dot{\tilde{\phi}}_1(x,\bar{\lambda}_1) = i\left(x-\frac{1}{2\nu}\right)\tilde{\psi}_1(x,\bar{\lambda}_1) \tag{65.19}$$

和

$$\dot{\tilde{\phi}}_2(x,\bar{\lambda}_1) = i\left(x-\frac{1}{2\nu}\right)\tilde{\phi}_2(x,\bar{\lambda}_1) + i\frac{1}{2\nu}e^{\bar{\lambda}_1 x}. \tag{65.20}$$

由 (65.5) 等，得

$$b_1 = -e^{-Z} e^{i(-2\lambda_1 x+\varphi)}. \tag{65.21}$$

它显然与 (65.3) 一致. 当 $N=1$ 时， $\dot{a}(\lambda_1) = (\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)^{-1}$,(61.18) 化为

$$\lambda_{1t} = -i2\nu\,\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ q(x)\psi_2(x,\lambda_1)\phi_2(x,\lambda_1) + \overline{q(x)}\psi_1(x,\lambda_1)\phi_1(x,\lambda_1) \Big\}\, dx. \tag{65.22}$$

以 (65.5) 等代入，注意 $2\nu dx = dZ$, 得

$$\lambda_{1t} = i\frac{\varepsilon}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 Z \Big\{ q\, e^{Z+i\varphi} + \bar{q} e^{-Z-i\varphi} \Big\}\, dZ. \tag{65.23}$$

以实部和虚部表出，

$$\mu_t = -\frac{1}{2}\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} Z \operatorname{th} Z \operatorname{Im}\left(q\, e^{i\varphi}\right)\, dZ \tag{65.24}$$

和

$$\nu_t = \frac{1}{2}\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} Z \operatorname{Re}\left(q\, e^{i\varphi}\right)\, dZ. \tag{65.25}$$

现在来看 $b_1(t)$ 随时间的演化与修正项的关系. 在 $N=1$ 时，(62.22) 为

$$b_{1t}(t) - i4\lambda_1^2 b_1(t) = -i2\nu\,\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \left[\dot{\phi}_1(\lambda_1) - b_1(t)\dot{\psi}_1(\lambda_1)\right]\phi_1(\lambda_1)\bar{q} + \left[\dot{\phi}_2(\lambda_1) - b_1(t)\dot{\psi}_2(\lambda_1)\right]\phi_2(\lambda_1)q \Big\}\, dx. \tag{65.26}$$

现在先看右端. 由 (65.5) 等，可以得到

$$\dot{\phi}_1(x,\lambda_1) - b_1(t)\dot{\psi}_1(x,\lambda_1) = -i2x\phi_1(x,\lambda_1) - i\frac{1}{2\nu} e^{-i\lambda_1 x}$$

$$= -ie^{-i\lambda_1 x}\left\{x\,\mathrm{sech}\,Z\,e^{-Z}+\frac{1}{2\nu}\right\}. \quad (65.27)$$

同理，得

$$\dot{\phi}_2(x,\lambda_1)-b_1(t)\dot{\psi}_2(x,\lambda_1) = -ib_1(t)\left\{2x\phi_2(x,\lambda_1)-\frac{1}{2\nu}\,e^{i\lambda_1 x}\right\}$$

$$= -ib_1(t)e^{i\lambda_1 x}\left\{x\,\mathrm{sech}\,Z\,e^{Z}-\frac{1}{2\nu}\right\}. \quad (65.28)$$

代入 (65.26) 的右端，除去因子 $b_1(t)$, 作变换 $dZ=2\nu\,dx$ 后，得

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{sech}^2 Z\left\{\bar{q}e^{-i\varphi-Z}+qe^{i\varphi+Z}\right\}dZ$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}\,Z\,\frac{1}{2\nu}\left\{\bar{q}e^{-i\varphi}-qe^{i\varphi}\right\}dZ. \quad (65.29)$$

也就是

$$\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{sech}\,Z\,\mathrm{Re}\left(qe^{i\varphi}\right)dZ$$

$$+\,i\,\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{sech}\,Z\,\mathrm{th}\,Z\;\mathrm{Im}\left(qe^{i\varphi}\right)dZ$$

$$-\,i\frac{\varepsilon}{2\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}\,Z\,\mathrm{Im}\left(qe^{i\varphi}\right)dZ. \quad (65.30)$$

现在来看 (65.26) 的左端. 由 (65.3), 得

$$b_{1t}(t)=b_1(t)\left\{-i2(\lambda_1\xi_t+\lambda_{1t}\xi)+i\delta_t\right\}. \quad (65.31)$$

代入 (65.26) 的左端，除去因子 $b_1(t)$ 后，得

$$-i2(\lambda_1\xi_t+\lambda_{1t}\xi)+i\delta_t-i4\lambda_1^2. \quad (65.32)$$

它的实部和虚部分别是

$$2\nu\xi_t+2\nu_t\xi+8\mu\nu \quad (65.33)$$

和

$$-2\mu\xi_t - 2\mu_t\xi + \delta_t - 4(\mu^2 - \nu^2). \tag{65.34}$$

这样，(65.33) 与 (65.30) 的第一个积分相等，

$$\xi_t = -4\mu - \frac{\nu_t}{\nu} + \frac{\varepsilon}{2\nu}\int_{-\infty}^{\infty} x \operatorname{sech} Z \operatorname{Re}\left(qe^{i\varphi}\right) dZ. \tag{65.35}$$

计及 (65.25), 并将 $x = Z/(2\nu) + \xi$ 代入，注意 (65.1), 此等式两端正比于 ξ 的项相消，最后得

$$\xi_t = -4\mu + \frac{\varepsilon}{4\nu^2}\int_{-\infty}^{\infty} Z \operatorname{sech} Z \operatorname{Re}\left(qe^{i\varphi}\right) dZ. \tag{65.36}$$

(65.34) 与 (65.30) 的第二积分和第三积分 (除去虚数因子 i) 相等. 然后计及 (65.24), 并将 $x = Z/(2\mu) + \xi$ 代入，注意 (65.1), 此等式两端正比于 ξ 的项相消，最后得

$$\begin{aligned}\delta_t &= 2\mu\xi_t + 4(\mu^2 - \nu^2) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2\nu}\int_{-\infty}^{\infty}(1 - Z \operatorname{th} Z) \operatorname{sech} Z \operatorname{Im}\left(qe^{i\varphi}\right) dZ.\end{aligned} \tag{65.37}$$

这样，就在 1- 孤子的情况下，得到了确定谱参数的缓慢变化的全部公式，即确定 μ_t 和 ν_t 的公式 (65.24) 和 (65.25), 确定 ξ_t 和 δ_t 的公式 (65.36) 和 (65.37).

§ 66 绝热解的修正

前面说到，$u^a(x,t)$ 既不是不含修正项的 NLS 方程的解，也不是含修正项的方程的 ε 一级近似解. 它是含修正项的 NLS 方程的 ε 一级近似解的一部分. 我们现在来看另一部分.

当 $N = 1$ 时，萨哈诺夫 - 沙巴特反散射方程 (17.14) 简化为

$$\tilde{\psi}_1(x,\lambda)e^{i\lambda x} = 1 + i\frac{1}{\lambda - \lambda_1}c_1\psi_1(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x} + J_1(x,\lambda) \tag{66.1}$$

和

$$\tilde{\psi}_2(x,\lambda)e^{i\lambda x} = \quad i\frac{1}{\lambda-\lambda_1}c_1\psi_2(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x} + J_2(x,\lambda), \qquad (66.2)$$

这里

$$J_k(x,\lambda) = \frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda')}{\lambda'-\lambda+i0}\psi_k(x,\lambda')e^{i\lambda' x}\,d\lambda'. \quad k=1,2. \quad (66.3)$$

下列方程

$$\tilde{\psi}_1^a(x,\lambda)e^{i\lambda x} = 1 + i\frac{1}{\lambda-\lambda_1}c_1\psi_1^a(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x} \qquad (66.4)$$

和

$$\tilde{\psi}_2^a(x,\lambda)e^{i\lambda x} = \quad i\frac{1}{\lambda-\lambda_1}c_1\psi_2^a(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x} \qquad (66.5)$$

称为方程 (66.1) 和 (66.2) 的**绝热近似方程**, 如果这里的 λ_1 和 c_1 对时间的相依关系，按含修正项的 NLS 方程的散射数据对时间的相依关系来决定. 这就是前面讨论过的 (64.1) 和 (64.2). 由此定出的

$$u^a(x,t) = 2\bar{c}_1\overline{\psi_2^a(x,\lambda_1)}e^{-i\bar{\lambda}_1 x} \qquad (66.6)$$

称为“含修正项的 NLS 方程的绝热近似解”.

现在来看，在准至 ε 一阶时对 (66.1) 和 (66.2) 的求解. 引入

$$\psi(x,\lambda) = \psi^a(x,\lambda) + \delta\psi(x,\lambda), \qquad (66.7)$$

从 (66.1) 和 (66.2) 及 (66.4) 和 (66.5), 可得

$$\delta\tilde{\psi}_1(x,\lambda)e^{i\lambda x} = i\frac{1}{\lambda-\lambda_1}c_1\delta\psi_1(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x} + J_1^a(x,\lambda) \qquad (66.8)$$

和

$$\delta\tilde{\psi}_2(x,\lambda)e^{i\lambda x} = i\frac{1}{\lambda-\lambda_1}c_1\delta\psi_2(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x} + J_2^a(x,\lambda), \qquad (66.9)$$

式中 $J_k^a(x,\lambda)$ 是 ε 级的量，即将 (66.3) 的 $J_k(x,\lambda)$ 中的 $\psi(x,\lambda')$ 换成 $\psi^a(x,\lambda')$.

于是，含修正项的 NLS 方程的准至 ε 级的解可以写作

$$u(x,t) = u^a(x,t) + \delta u(x,t), \tag{66.10}$$

这里 $u^a(x,t)$ 为 (66.6), 而

$$\delta u(x,t) = 2\bar{c}_1\overline{\delta\psi_2(x,\lambda_1)}e^{-i\bar{\lambda}_1 x} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{r(\lambda')}\,\overline{\psi_2^a(x,\lambda')}e^{-i\lambda' x}\,d\lambda'. \tag{66.11}$$

在 (66.8) 和 (66.9) 中，原来是无反射的，现在的 $r(\lambda)$ 是由修正项引起的，所以已是 ε 级的量． $J_k^a(x,\lambda)$ 中的 $\psi^a(x,\lambda)$ 直接就是不含修正项的 NLS 方程的无反射时的约斯特解 $\psi(x,\lambda)$, 是已知的． $r(\lambda)$ 又从前面由修正项决定散射数据的时间相依的关系定出，也是已知的． (66.8) 和 (66.9) 中待定的是 $\delta\tilde{\psi}_1(x,\lambda)$ 和 $\delta\tilde{\psi}_2(x,\lambda)$. 它们可以由解线代数方程而得出．

由 (66.8) 和 (66.9), 得

$$\overline{\delta\psi_2(x,\lambda)}e^{i\bar{\lambda}x} = i\frac{1}{\bar{\lambda}-\lambda_1}c_1\delta\psi_1(x,\lambda_1)e^{i\lambda_1 x} + J_1^a(x,\bar{\lambda}) \tag{66.12}$$

和

$$\delta\psi_1(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = i\frac{1}{\lambda-\bar{\lambda}_1}\bar{c}_1\overline{\delta\psi_2(x,\lambda_1)}e^{-i\bar{\lambda}_1 x} + \overline{J_2^a(x,\bar{\lambda})}. \tag{66.13}$$

取 $\lambda = \lambda_1$ 后， 上两式成为 $\overline{\delta\psi_2(x,\lambda_1)}$ 和 $\delta\psi_1(x,\lambda_1)$ 的联立方程．容易得到

$$\overline{\delta\psi_2(x,\lambda_1)} = \frac{1}{\Delta}\left\{J_1^a(x,\bar{\lambda}_1) + i\frac{c_1 e^{i2\lambda_1 x}}{\bar{\lambda}_1-\lambda_1}\overline{J_2^a(x,\bar{\lambda}_1)}\right\}e^{-i\bar{\lambda}_1 x}. \tag{66.14}$$

注意 (66.3),

$$J_1^a(x,\bar{\lambda}_1) = \frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda')}{\lambda'-\bar{\lambda}_1}\psi_1(x,\lambda')e^{i\lambda' x}\,d\lambda', \tag{66.15}$$

$$\overline{J_2^a(x,\bar{\lambda}_1)} = -\frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{r(\lambda')}}{\lambda'-\lambda_1}\overline{\psi_2(x,\lambda')}e^{-i\lambda' x}\,d\lambda', \qquad (66.16)$$

(66.14) 乘以 $2\bar{c}_1e^{-i\bar{\lambda}_1x}$ 即为 $\delta u(x,t)$ 的表示式 (66.11) 右端第 1 项.

由于

$$\frac{1}{\Delta}2\bar{c}_1e^{-i2\bar{\lambda}_1x}\frac{1}{\lambda'-\bar{\lambda}_1}e^{i\lambda' x} = 2\psi_1(x,\lambda'), \qquad (66.17)$$

$$\frac{1}{\Delta}2\bar{c}_1c_1e^{i2(\lambda_1-\bar{\lambda}_1)x}\frac{1}{\lambda'-\lambda_1}e^{-i\lambda' x} = \overline{\psi_2(x,\lambda')} - e^{-i\lambda' x}, \qquad (66.18)$$

(66.11) 即可化成

$$\delta u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int r(\lambda')\psi_1^a(x,\lambda')^2\,d\lambda' + \frac{1}{\pi}\int \overline{r(\lambda')}\,\overline{\psi_2^a(x,\lambda')^2}\,d\lambda'. \qquad (66.20)$$

这样，我们就得到了准至 ε 一级的有关公式. 我们注意，这是通过两步实现的，第一步是得到绝热解，它将修正项的效应的一部分已包括在内，而另一部分则包括在 $\delta u(x,t)$ 之中. 以下我们来计算它们.

§ 67 孤子形状的改变

现在来讨论 (66.16) 中的 $\delta u(x,t)$ 在初条件

$$\delta u(x,0) = 0 \qquad (67.1)$$

下的结果. 以 (64.23) 和 (64.24) 代入，得

$$\delta u(x,t) = -\frac{1}{\pi}\frac{\nu^2e^{-i2\varphi}}{\mathrm{ch}^2Z}\int r(\lambda)\frac{e^{i2\lambda x}}{(\lambda-\mu+i\nu)^2}\,d\lambda$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\overline{r(\lambda)}\left(\frac{\lambda-\mu-i\nu\,\mathrm{th}\,Z}{\lambda-\mu-i\nu}\right)^2e^{-i2\lambda x}\,d\lambda. \qquad (67.2)$$

前面我们讲过，由于原来无反射，现在的 $r(\lambda)$ 是由修正项而引起的，所以先讨论连续谱参数 λ 时的 $a(\lambda)$ 和 $b(\lambda)$ 对时间的依赖关系，(60.16) 和 (60.17),

$$a_t(\lambda) = -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \psi_1(x,\lambda)\bar{q}(x)\phi_1(x,\lambda) + \psi_2(x,\lambda)q(x)\phi_2(x,\lambda) \Big\}\, dx \tag{67.3}$$

和

$$b_t(\lambda) - i4\lambda^2 b(\lambda) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \tilde{\psi}_1(x,\lambda)\bar{q}(x)\phi_1(x,\lambda) + \tilde{\psi}_2(x,\lambda)q(x)\phi_2(x,\lambda) \Big\}\, dx. \tag{67.4}$$

既然积分号前均有小量 ε，被积函数中所含各量都可取 0 级近似，即 $\psi_1(x,\lambda)$ 等可以换成 (65.6) 等，这样得到

$$a_t(t,\lambda) = \frac{i\varepsilon}{(\lambda-\mu+i\nu)^2}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{ \frac{\lambda-\mu-i\nu\,\mathrm{th}\,Z}{\mathrm{ch}\,Z}\bar{q}e^{-i\varphi} + \frac{\lambda-\mu+i\nu\,\mathrm{th}\,Z}{\mathrm{ch}\,Z}\,q\,e^{i\varphi}\Big\}\, dZ. \tag{67.5}$$

容易看出，被积函数前后两项互为复共轭，所以

$$a_t(t,\lambda) = \frac{i\varepsilon}{(\lambda-\mu+i\nu)^2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-\mu+i\nu\,\mathrm{th}\,Z}{\mathrm{ch}\,Z}\,q\,e^{i\varphi}\, dZ. \tag{67.6}$$

注意

$$-2\lambda x + \varphi = -\frac{(\lambda-\mu)Z}{\nu} - 2\lambda\xi + \delta, \tag{67.7}$$

得

$$b_t(t,\lambda) - i4\lambda^2 b(t,\lambda) = -i\frac{\varepsilon}{(\lambda-\mu)^2+\nu^2}\frac{e^{-i2\lambda\xi+i\delta}}{2\nu}A(\lambda,\mu,\nu,\{t\}), \tag{67.8}$$

这里

$$A(\lambda,\mu,\nu,\{t\}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mu-\lambda)Z/\nu}$$

$$\cdot \left\{(\lambda-\mu-i\nu\,\mathrm{th}\,Z)^2\bar{q}e^{-i\varphi} - \nu^2\mathrm{sech}^2\,Z\,q\,e^{i\varphi}\right\}dZ. \quad (67.9)$$

这里，$A(\lambda,\mu,\nu,\{t\})$ 中添上 $\{t\}$ 并不是说 A 显含 t, 而是强调它的宗量取 t 时的表示式.

我们注意当 $\varepsilon\to 0$ 时，以上的解退化为不含修正项的 NLS 方程的单孤子解，这表示是无反射的情况，因此

$$b(t,\lambda)\to 0. \qquad \text{当}\,\varepsilon\to 0\,\text{时} \quad (67.10)$$

另外，连续谱的 λ 是独立于 t 的. 将 (67.8) 简写作

$$b_{1t}(t,\lambda) = i4\lambda^2 b(t,\lambda) - i\varepsilon f(t,\lambda), \quad (67.11)$$

式中 $f(t,\lambda)$ 就代表 (67.8) 右端相应的表示式. 设

$$b(t,\lambda) = \varepsilon\, e^{i4\lambda^2 t} g(t,\lambda), \quad (67.12)$$

代入 (67.10), 得

$$g_t(t,\lambda) = -if(t,\lambda)e^{-i\lambda^2 t}. \quad (67.13)$$

所以得到

$$g(t,\lambda) = -i\int_0^t f(t',\lambda)e^{-i\lambda^2 t'}\,dt'. \quad (67.14)$$

这里取了初始条件 $g(0,\lambda)=0$, 因为 $\delta u(x,0)=0$.

由于 (67.12) 的右端已有一个因子 ε, 所以 (67.14) 中的被积函数可取 $\varepsilon\to 0$ 时的量. 这时 μ 和 ν 为常数,

$$\xi = -4\mu t', \qquad \delta = -4(\mu^2+\nu^2)t' + \varphi_{10}. \quad (67.15)$$

这样，得

$$b(t,\lambda) = -i\varepsilon\, e^{i4\lambda^2}\int_0^t \frac{A(\lambda,\mu,\nu,\{t'\})e^{-i2\lambda\xi+i\delta-i4\lambda^2 t'}}{2\nu\{(\lambda-\mu)^2+\nu^2\}}\,dt'. \quad (67.16)$$

即使如此，上式中的被积函数仍依赖于 t', 显然，即使 q 取十分简单的形式，(5.16) 也难以求出显式解. 通常是在 t 的一个小范围内，由 (5.16) 求出 $b_1(t)$ 的近似表示式. 由 (67.15), 有

$$-i2\lambda\xi + i\delta - i4\lambda^2 t' = -i4\{(\lambda-\mu)^2+\nu^2\}t' + i\varphi_{10} \tag{67.17}$$

作分部积分，得

$$b(t,\lambda) = \varepsilon\frac{e^{i4\lambda^2 t}}{4\{(\lambda-\mu)^2+\nu^2\}}\frac{A(\lambda,\mu,\nu,\{t'\})e^{-i2\lambda\xi+i\delta-i4\lambda^2t'}}{2\nu\{(\lambda-\mu)^2+\nu^2\}}\Big|_{t'=0}^{t'=t}$$

$$+\varepsilon\, O\left(\frac{t}{t_p}\right), \tag{67.18}$$

这里 t_p 表征微扰处理的有效时间，$t < t_p$. 关于 t_p 的量怎样估计，是一个比较复杂的问题. 一般认，为可以用 (65.25) 表出的 ν_t/ν 来定义，即

$$t_p^{-1} = \left|\frac{1}{2\nu}\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sech} Z\,\mathrm{Re}\left(q\,e^{i\varphi}\right)\,dZ\right|. \tag{67.19}$$

这里我们简单理解为某一小量就可以了. 这样，$b(t,\lambda)$ 由上式中取上、下限的两项组成. 此两项分别是

$$\varepsilon\frac{A(\lambda,\mu,\nu,\{t\})e^{i8\lambda\mu t-i4(\mu^2+\nu^2)t+i\varphi_{10}}}{8\nu\{(\lambda-\mu)^2+\nu^2\}^2} \tag{67.20}$$

和

$$-\varepsilon\frac{A(\lambda,\mu,\nu,\{t=0\})e^{i4\lambda^2t+i\varphi_{10}}}{8\nu\{(\lambda-\mu)^2+\nu^2\}^2}. \tag{67.21}$$

这样，得到了 $b(t,\lambda)$. 除以 $a(\lambda)$ 就得到 $r(t,\lambda)$. 因为 $b(t,\lambda)$ 已是 ε 一级小量，所以 $a(\lambda)$ 取

$$a(\lambda) = \frac{\lambda-\mu-i\nu}{\lambda-\mu+i\nu}. \tag{67.22}$$

将 (67.20) 除以 (67.22) 后代入 (67.2), 所得的 $\delta u(x,t)$ 的这一部分记为 $\delta u(x,t)'$,

$$\delta u(x,t)'e^{i\varphi} = -\frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{\nu^2 e^{-i\mu Z/\nu}}{\mathrm{ch}^2 Z}\int \frac{A(\lambda,\mu,\nu,\{t\})}{\nu\{(\lambda-\mu)^2+\nu^2\}^3}e^{i\lambda Z/\nu}d\lambda$$

$$+\frac{\varepsilon}{8\pi}e^{i\mu Z/\nu}\int \frac{\overline{A(\lambda,\mu,\nu,\{t\})}(\lambda-\mu-i\nu\,\mathrm{th}\,Z)^2}{\nu\{(\lambda-\mu)^2+\nu^2\}^3}e^{-i\lambda Z/\nu}d\lambda. \quad (67.23)$$

将 (67.21) 除以 (67.22) 后代入 (67.2), 所得的 $\delta u(x,t)$ 的这一部分记为 $\delta u(x,t)''$,

$$\delta u(x,t)''e^{i\varphi} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{\nu^2 e^{-i(\mu Z/\nu+\delta)}}{\mathrm{ch}^2 Z}\int \frac{A(\lambda,\mu,\nu,\{t=0\})}{\nu\{(\lambda-\mu)^2+\nu^2\}^3} \cdot e^{-i2\lambda^2 t+i\lambda(Z+2\nu\xi)/\nu}d\lambda$$

$$-\frac{\varepsilon}{8\pi}e^{i(\mu Z/\nu+\delta)}\int \frac{\overline{A(\lambda,\mu,\nu,\{t=0\})}(\lambda-\mu-i\nu\,\mathrm{th}\,Z)^2}{\nu\{(\lambda-\mu)^2+\nu^2\}^3} \cdot e^{i2\lambda^2 t-i\lambda(Z+2\nu\xi)/\nu}d\lambda. \quad (67.24)$$

可见 (67.23) 的右端对 x 和 t 的依赖是通过 Z 的，这就是通常所说的对 t 的依赖是绝热的. 可以用留数计算证明，当 $|Z|\to\infty$ 时，(67.23) 趋于 0. 另一方面，(67.24) 是一个振荡函数，其计算通常采用稳定相近似. 这里无法详细讨论. 有关的主要结果是，随着 t 增大，$\delta u(x,t)$ 由 (67.23) 所给出的 $\delta u(x,t)'$ 来近似表达.

§ 68 阻尼效应

作为例子，研究 1- 孤子的阻尼效应. 考虑含阻尼的 NLS 方程：

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = -i\Gamma u, \quad (68.1)$$

这里 Γ 为一正常数. 所以,

$$\varepsilon q[u] = -\Gamma u. \tag{68.2}$$

对于 1- 孤子解，有

$$\varepsilon q e^{i\varphi} = -\Gamma\, 2\nu \operatorname{sech} Z. \tag{68.3}$$

由于它的虚部为 0, 由 (65.23),$\mu_t = 0$, 因此得

$$\mu = \mu_0. \tag{68.4}$$

将 (68.2) 代入 (65.24), 得

$$\nu_t = -\Gamma\,\nu \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 Z\, dZ = -2\Gamma\,\nu. \tag{68.5}$$

因此得

$$\nu = \nu_0\, e^{-2\Gamma t}. \tag{68.6}$$

将 (68.3) 代入 (65.36), 注意积分中的被积函数是 Z 的奇函数，因而积分为 0.

$$\xi_t = -4\mu_0, \tag{68.7}$$

即

$$\xi = -4\mu_0\, t + \xi_0. \tag{68.8}$$

由于 (68.3) 的虚部为 0,(65.37) 的积分为 0, 得到

$$\delta_t = -4\mu_0^2 - 4\nu_0^2\, e^{-4\Gamma t}. \tag{68.9}$$

积分后，得

$$\delta = -4\mu_0^2\, t - \frac{\nu_0^2}{\Gamma}\left(1 - e^{-4\Gamma t}\right) + \delta_0. \tag{68.10}$$

以上的量，凡是带下标 0 的，都是常数. 当 $\Gamma \to 0$ 时，(68.10) 化为

$$\delta = -4(\mu_0^2 + \nu_0^2)t + \delta_0, \tag{68.11}$$

而 (65.25) 化为

$$\nu = \nu_0. \tag{68.31}$$

我们看到，在这样的极限下，一切回到不含修正项的 NLS 方程的 1- 孤子解.

§ 69 含修正项的 KdV 方程

含修正项的 KdV 方程是

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \varepsilon q[u], \tag{69.1}$$

式中 $q[u]$ 为 u 的泛函， ε 为一个小的实参数. 当 ε 趋于 0 时，方程过渡到通常的 KdV 方程. 现在考虑在边值仍为 0 的条件

$$u(x,t) \to 0 \qquad \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时} \tag{69.2}$$

下建立以 ε 为小参数的微扰方法. 显然应当要求，微扰方法给出的解，当 $\varepsilon \to 0$ 时，过渡到 KdV 方程的解.

和前面讨论含修正项的 NLS 方程时一样，保留了第一个拉克斯方程，而放弃第二个，那么约斯特解的引入，它们的解析性和渐近行为都与前面不含修正项的 KdV 方程时一样，反散射方程也保留原来同样的形式. 但是，散射数据

$$S(t) = \{r(t,k),\, c_n(t),\, k_n\} \tag{69.3}$$

随时间的演化，需要另行设法求出. 只有确定了它，反散射方程定出的含修正项的方程的解才可以表为 t 的确定函数. 这时，散射数据的结果与不含修正项时的结果的差别只是 ε 阶的小量. 从以上的分析可见，我们面对的问题首先是怎样才能决定散射数据随时间的演化，且所定出的这种与时间的关系使得反散射方程定出的 $u(x,t)$ 满足含修正项的 KdV 方程.

既然放弃了第二个拉克斯方程，那么

$$\check{\phi}(x,t,k)=\{\partial_t-\hat{M}\}h(t,k)\phi(x,t,k) \tag{69.4}$$

就不再为 0, 这里 $\hat{L}$、$\hat{M}$ 和 $h(t,k)$ 等都取第 1 章的表示式：

$$\hat{L}=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x,t), \tag{69.5}$$

$$\hat{M}=-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+6u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+3u_x(x,t), \tag{69.6}$$

$$h(t,k)=e^{-i4k^3t}. \tag{69.7}$$

如果以算子 $\{\hat{L}-k^2\}$ 作用于 (69.4), 用与处理含修正项的 NLS 方程时同样的手续，就得到

$$\{\hat{L}-k^2\}\check{\phi}(x,t,k)=G(x,t,k)h(t,k)\phi(x,t,k), \tag{69.8}$$

$$G(x,t,k)=-\varepsilon q[u]+(k^2)_t. \tag{69.9}$$

由 $\phi(x,t,k)$ 的边界条件、它的用 $\psi(x,t,k)$ 和 $\tilde{\psi}(x,t,k)$ 的展开式和 $h(t,k)$ 的表示式，容易得到，

$$\check{\phi}(x,t,k)\to 0, \qquad \text{当 } x\to-\infty \text{ 时} \tag{69.10}$$

和

$$\check{\phi}(x,t,k)\to h(t,k)a_t(t,k)e^{-ikx}$$
$$+h(t,k)\{b_t(t,k)-i8k^3b(t,k)\}e^{ikx}. \qquad \text{当 } x\to\infty \text{ 时} \tag{69.11}$$

另一方面，(69.8) 是一个非齐次方程，它的解一般可以表为相应的齐次方程的两个解的组合. 我们写下

$$\check{\phi}(x,t,k)=\alpha(x,t,k)\psi(x,t,k)+\beta(x,t,k)\phi(x,t,k). \tag{69.12}$$

由于这时是二阶方程，按拉格朗日乘子方法，引入附加条件

$$\alpha_x(x,t,k)\psi(x,t,k)+\beta_x(x,t,k)\phi(x,t,k)=0, \tag{69.13}$$

则

$$\check{\phi}_x(x,t,k)=\alpha(x,t,k)\psi_x(x,t,k)+\beta(x,t,k)\phi_x(x,t,k). \tag{69.14}$$

将 (69.12) 代入 (69.8), 得

$$-\alpha_x(x,t,k)\psi_x(x,t,k)-\beta_x(x,t,k)\phi_x(x,t,k)$$
$$=G(x,t,k)h(t,k)\phi(x,t,k). \tag{69.15}$$

以 $\phi_x(x,t,k)$ 乘 (69.13) 加上以 $\phi(x,t,k)$ 乘 (69.15), 注意 (1.31) 得

$$-\frac{1}{i2k}a(k)\alpha_x=h(t,k)G(x,t,k)\phi(x,t,k)^2. \tag{69.16}$$

以 $\psi_x(x,t,k)$ 乘 (69.13) 加上以 $\psi(x,t,k)$ 乘 (69.15), 注意 (1.31), 得

$$\frac{1}{i2k}a(k)\beta_x=h(t,k)G(x,t,k)\phi(x,t,k)\psi(x,t,k). \tag{69.17}$$

将上两式对 x 从 $-\infty$ 到 x 积分，注意在 $-\infty$ 处的为 0 的边界条件，得

$$\alpha(x,t,k)=\frac{h(t,k)}{i2ka(t,k)}\int_{-\infty}^{x}G(y,t,k)\phi(y,t,k)^2dy, \tag{69.18}$$

$$\beta(x,t,k)=-\frac{h(t,k)}{i2ka(t,k)}\int_{-\infty}^{x}G(y,t,k)\phi(y,t,k)\psi(x,t,k)dy. \tag{69.19}$$

将此两式代入 (69.12), 得到 $\check{\phi}(x,t,k)$ 的表示式. 再取极限 $x\to\infty$, 得

$$\check{\phi}(\infty,t,k)\to\alpha(\infty,t,k)e^{ikx}$$
$$+\beta(\infty,t,k)\left\{a(t,k)e^{-ikx}+b(t,k)e^{ikx}\right\}. \tag{69.20}$$

与 (69.11) 比较，得

$$h(t,k)a_t(t,k)=\beta(\infty,t,k)a(t,k), \tag{69.21}$$

$$h(t,k)\{b_t(t,k)-i8k^3b(t,k)\}=\alpha(\infty,t,k)+\beta(\infty,t,k)b(t,k). \tag{69.22}$$

以 (69.18) 和 (69.19) 代入，得

$$a_t(t,k) = -i(2k)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t,k)\phi(x,t,k)\psi(x,t,k)\,dx, \tag{69.23}$$

$$b_t(t,k) - i8k^3 b(t,k) = i\{2ka(t,k)\}^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t,k)\phi(x,t,k)\{\phi(x,t,k) - b(t,k)\psi(x,t,k)\}\,dx. \tag{69.24}$$

这两式就是含修正项的 KdV 方程的以反散射方法为基础的微扰方法的基本方程. 我们看到，当 $\varepsilon \to 0$ 时，有 $G(x,t,k) \to 0$ 这样当不存在微扰项时的结果.

对于散射态解，即对于 k 的连续谱的情况，入射波和散射波有同样的波数. 这时， k 不依赖于 t, 即 $k_t = 0$. 这与量子力学中的情况一样. 因此，这时有

$$G(x,t,k) = \varepsilon q(x,t). \tag{69.25}$$

由 $r(t,k) = b(t,k)/a(t,k)$, 得

$$r_t(t,k) = \frac{b_t(t,k)}{a(t,k)} - b(t,k)\frac{a_t(t,k)}{a(t,k)^2}, \tag{69.26}$$

以 (69.23) 和 (69.24) 代入，得

$$r_t(t,k) - i8k^3 r(t,k) = i\frac{\varepsilon}{2ka(t,k)^2}\int_{-\infty}^{\infty} q(x,t)\phi(x,t,k)^2\,dx. \tag{69.27}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，又给出 KdV 方程相应的结果.

§ 70　k_n 和 $b_n(t)$ 随时间的演化

对于束缚态，谱参数 k_n 的值将随时间发生变化. 但由于是束缚态，所以应当有

$$a(t,k_n) = 0, \tag{70.1}$$

$$\phi(x,t,k_n) = b_n(t)\psi(x,t,k_n). \tag{70.2}$$

医 为对任何 t 仍保持束缚态，上两式应当成立，所以又有

$$a_t(t,k_n) = 0. \tag{70.3}$$

我们看到，(69.12) 中的函数都可以解析延拓到复 k 的上半平面．所以， $k \to k_n$ 时的极限成立．以上式代入，得

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x,t,k_n)\phi(x,t,k_n)^2\,dx = 0. \tag{70.4}$$

由于 (69.9)，有

$$G(x,t,k_n) = -\varepsilon q[u] + (k_n^2)_t. \tag{70.5}$$

(70.4) 化为

$$(k_n^2)_t \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,t,k_n)^2\,dx = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} q(x,t)\phi(x,t,k_n)^2\,dx. \tag{70.6}$$

这式表明，当存在修正项时，谱参数 k_n 如何随时间演化．当 $\varepsilon \to 0$ 时，显然有 $k_{nt} = 0$. 这正是不含修正项的 KdV 方程的结果．这里我们注意，自然不应将只适用于连续谱的结果 (69.25) 先行代入．用与前面处理 NLS 方程时同样的手续可以直接证明 (70.6).

既然 $\phi(x,t,k_n)$ 和 $\psi(x,t,k_n)$ 随时间的演化是完全确定的，所以它们的比例 $b_n(t)$ 随时间的演化也应当是完全确定了的．但是由于 (69.8) 是一个非齐次的二阶方程，在求解时利用了拉格朗日乘子条件 (69.13)，这里显然要有两个独立解才行．可是，当 $k = k_n$ 时，只有一个独立解．于是，一种简单的办法是引入 KdV 方程的解的紧致的台集的假设 (见第 233 页)．使这时的 $b(k)$ 可以解析延拓到复 k 的上半平面的某一区域， k_n 等点包括在内，并有

$$b(k_n) = b_n. \tag{70.7}$$

这样，(69.24) 就在这一区域中成立. 取 $k \to k_n$ 的极限，注意在这一极限下，右端的分母和分子均趋于 0. 由洛比达 (G.F.A.De L'Hospital) 法则，有

$$\check{\phi}(x,t,k_n) = \frac{h(t,k_n)}{i2k_n\dot{a}(t,k_n)} \int_{-\infty}^{x} G(y,t,k_n)\phi(y,t,k_n) \cdot \left\{\dot{\phi}(y,t,k_n)\psi(x,t,k_n) - \dot{\psi}(x,t,k_n)\phi(x,t,k_n)\right\} dy. \tag{70.8}$$

取极限 $x \to \infty$, 得

$$b_t(t,k_n) - i8k_n^3 b(t,k_n) = i\{2k_n\dot{a}(t,k_n)\}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G(x,t,k_n) \cdot \phi(x,t,k_n)\left\{\dot{\phi}(x,t,k_n) - b(t,k_n)\dot{\psi}(x,t,k_n)\right\} dx. \tag{70.9}$$

这里注意含 $\dot{b}(t,k_n)$ 之项无贡献，因为它包含的积分由于 (70.4) 为 0. 上式也就是

$$b_n(t) - i8k_n^2 b_n(t) = -i\frac{\varepsilon}{2k_n\dot{a}(t,k_n)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\dot{\phi}(k_n) - b_n(t)\dot{\psi}(k_n)\right\}\phi(k_n)q[u]\, dx. \tag{70.10}$$

显然，当 $\varepsilon \to 0$ 时，它退化到不含修正项时的 KdV 方程的结果.

§ 71 守恒律的微扰修正

当不存在修正项时， KdV 方程有无穷多个守恒律. 我们回忆一下导出它们的手续. 按反散射方法，得到

$$\ln a(t,k) = \hat{\phi}(\infty,t,k). \tag{71.1}$$

将此式右端对 k^{-1} 展开，得

$$\hat{\phi}(\infty,t,k) = (i2k)^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{J_j}{(i2k)^j}, \tag{71.2}$$

式中

$$J_j = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_j(x,t)\, dx, \tag{71.3}$$

这里被积函数 $\mu_j(x,t)$ 是 $u(x,t)$、$\overline{u(x,t)}$ 和它们对 x 的微商的多项式.

由于不存在修正项时， $a(t,k)$ 是守恒的，因而 (71.2) 的左端独立于 t. 这样，它的右端按 k 展开的无穷多个项也独立于 t, 即无穷多个守恒律.

我们看到,

$$\frac{d}{dt} J_j = 0. \tag{71.4}$$

这时必然有某种"荷"和"流", 分别以 $\mu_j(x,t)$ 和 ν_j 表示，使得

$$\partial_t \mu_j(x,t) + \partial_x \nu_j(x,t) = 0, \tag{71.5}$$

这里 $\nu_j(x,t)$ 也是 $u(x,t)$,$\overline{u(x,t)}$ 和它们对 x 的微商的多项式. 譬如，对应于

$$\mu_0(x,t) = u(x,t)\overline{u(x,t)}, \tag{71.6}$$

利用 KdV 方程，容易得到

$$\nu_0(x,t) = i\{u_x(x,t)\overline{u(x,t)} - u(x,t)\overline{u_x(x,t)}\}. \tag{71.7}$$

对于含修正项的 KdV 方程，由于保留了第一个拉克斯方程，因此 (71.1)—(71.3) 仍是成立的. 但这时 $a(t,k)$ 不独立于 t, $\frac{d}{dt}J_j$ 不再为 0, 而是一个 ε 阶的量. 它表示修正项的存在对原来的守恒律的修正.

可以用不同方式导出这种修正的表示式. 将含修正项的 KdV 方程写作

$$u_t = S[u] + \varepsilon q[u], \tag{71.8}$$

这里

$$S[u] = iu_{xx} + i|u|^2 u. \tag{71.9}$$

利用泛函微商，得

$$\frac{d}{dt}J_j=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\delta J_j}{\delta u(x,t)}\frac{d}{dt}u(x,t)+\frac{\delta J_j}{\delta\overline{u(x,t)}}\frac{d}{dt}\overline{u(x,t)}\right\}dx. \quad (71.10)$$

以 (71.8) 代入，得

$$\frac{d}{dt}J_j=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\delta J_j}{\delta u(x,t)}S[u(x,t)]+\frac{\delta J_j}{\delta\overline{u(x,t)}}\overline{S[u(x,t)]}\right\}dx$$

$$+\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\delta J_j}{\delta u(x,t)}q[u(x,t)]+\frac{\delta J_j}{\delta\overline{u(x,t)}}\overline{q[u(x,t)]}\right\}dx. \quad (71.11)$$

右端第一个积分的被积函数必然是一个散度项. 因为，对不含修正项的 KdV 方程，我们刚刚得到这一结果. 当 $\varepsilon\neq 0$ 时，$S[u]$ 和 $J_j[u]$ 还是不显含 ε, 所以右端第一项仍然是一个散度项的积分，因而为 0. 于是我们得到

$$\frac{d}{dt}J_j=\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\delta J_j}{\delta u(x,t)}q[u(x,t)]+\frac{\delta J_j}{\delta\overline{u(x,t)}}\overline{q[u(x,t)]}\right\}dx. \quad (71.12)$$

这一式给出，当 $\varepsilon\neq 0$ 时，$\frac{d}{dt}J_j$ 如何随 ε 而变化. 它们是含修正项的 KdV 方程的近似守恒律.

§ 72 KdV方程的绝热近似解

现在来看单孤子情况. 这时

$$u^a=-2\kappa_1^2\text{sech}^2 Z, \qquad Z=\kappa_1(x-\xi). \quad (72.1)$$

孤子参数 κ_1 和 ξ 对时间的相依现在由修正项来决定. (70.6) 这

时为

$$\kappa_{1t} = -\frac{\varepsilon}{2\kappa_1}\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} q(x,t)\phi(x,t,i\kappa_1)^2\,dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,t,\kappa_1)^2\,dx}. \tag{72.2}$$

由第 1 章 §8, 得到这时的约斯特解

$$\tilde{\psi}(x,k) = e^{-ikx} + \frac{2k_1}{k-k_1}\frac{F_1}{1+F_1}e^{-ikx} \tag{72.3}$$

和

$$\psi(x,k) = e^{ikx} + \frac{2\bar{k}_1}{k-\bar{k}_1}\frac{F_1}{1+F_1}e^{ikx}, \tag{72.4}$$

式中

$$F_1 \equiv \frac{1}{2\kappa_1}c_1 e^{-2\kappa_1 x}, \tag{72.5}$$

已知 κ_1 和 c_1 为正数，上式可以表为

$$F_1 = e^{-2Z}, \tag{72.6}$$

$$Z = \kappa_1(x - x_1 - 4\kappa_1^2 t). \tag{72.7}$$

由于无反射，所以

$$a(k) = \frac{k-i\kappa_1}{k+i\kappa_1}, \qquad \tilde{a}(k) = \frac{k+i\kappa_1}{k-i\kappa_1}, \tag{72.8}$$

$$\phi(x,k) = a(k)\tilde{\psi}(x,k), \qquad \tilde{\phi}(x,k) = \tilde{a}(k)\psi(x,k). \tag{72.9}$$

因此得

$$\phi(x,k) = e^{-ikx} + \frac{2\bar{k}_1}{k-\bar{k}_1}\frac{1}{1+F_1}e^{-ikx}, \tag{72.10}$$

$$\tilde{\phi}(x,k) = e^{ikx} + \frac{2k_1}{k-k_1}\frac{1}{1+F_1}e^{ikx}. \tag{72.11}$$

它们又可写作

$$\tilde{\psi}(x,k) = \frac{k - i\kappa_1 \operatorname{th} Z}{k-i\kappa_1}e^{-ikx}, \tag{72.12}$$

$$\psi(x,k)=\frac{k+i\kappa_1\text{th}\,Z}{k+i\kappa_1}e^{ikx}. \tag{72.13}$$

$$\phi(x,k)=\frac{k-i\kappa_1\text{th}\,Z}{k+i\kappa_1}e^{-ikx}, \tag{72.14}$$

$$\tilde{\phi}(x,k)=\frac{k+i\kappa_1\text{th}\,Z}{k-i\kappa_1}e^{ikx}. \tag{72.15}$$

在极点 $i\kappa_1$ 和 $-i\kappa_1$ 处，注意 $Z=\kappa_1(x-\xi)$, 有

$$\tilde{\psi}(x,-i\kappa_1)=\frac{1}{2}\frac{e^Z}{\text{ch}\,Z}e^{-\kappa_1 x}=\frac{1}{2}\text{sech}\,Z\,e^{-\kappa_1\xi}, \tag{72.16}$$

$$\psi(x,i\kappa_1)=\frac{1}{2}\frac{e^Z}{\text{ch}\,Z}e^{-\kappa_1 x}=\frac{1}{2}\text{sech}\,Z\,e^{-\kappa_1\xi}, \tag{72.17}$$

$$\phi(x,i\kappa_1)=\frac{1}{2}\frac{e^{-Z}}{\text{ch}Z}e^{\kappa_1 x}=\frac{1}{2}\text{sech}Z\,e^{\kappa_1\xi}, \tag{72.18}$$

$$\tilde{\phi}(x,-i\kappa_1)=\frac{1}{2}\frac{e^{-Z}}{\text{ch}Z}e^{\kappa_1 x}=\frac{1}{2}\text{sech}Z\,e^{\kappa_1\xi}. \tag{72.19}$$

所以

$$b_1=\frac{\phi(x,i\kappa_1)}{\psi(x,i\kappa)}=e^{2\kappa_1\xi}, \tag{72.20}$$

$$\tilde{b}_1=\frac{\tilde{\phi}(x,-i\kappa_1)}{\tilde{\psi}(x,-i\kappa)}=e^{2\kappa_1\xi}. \tag{72.21}$$

注意积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\text{sech}^2\,Z\,dz=\text{th}\,Z\Big|_{-\infty}^{\infty}=2 \tag{72.22}$$

和 $dZ=\kappa_1 dx$,(72.2) 化为

$$\kappa_{1t}=-\frac{\varepsilon}{4\kappa_1}\int_{-\infty}^{\infty}q(x,t)\text{sech}^2 Z\,dZ. \tag{72.23}$$

此式决定 κ_1 由修正项引起的变化.

由 (72.3) 等又得到

$$\dot{\tilde{\psi}}(x,-i\kappa_1)=\left(-ix+\frac{1}{i2\kappa_1}\right)\tilde{\psi}(x,-i\kappa_1)-\frac{1}{i2\kappa_1}e^{-\kappa_1 x},\quad(72.24)$$

$$\dot{\psi}(x,i\kappa_1)=\left(ix-\frac{1}{i2\kappa_1}\right)\psi(x,i\kappa_1)+\frac{1}{i2\kappa_1}e^{-\kappa_1 x},\quad(72.25)$$

$$\dot{\phi}(x,i\kappa_1)=\left(-ix-\frac{1}{i2\kappa_1}\right)\phi(x,i\kappa_1)+\frac{1}{i2\kappa_1}e^{\kappa_1 x},\quad(72.26)$$

$$\dot{\tilde{\phi}}(x,-i\kappa_1)=\left(ix+\frac{1}{i2\kappa_1}\right)\tilde{\phi}(x,-i\kappa_1)-\frac{1}{i2\kappa_1}e^{\kappa_1 x}.\quad(72.27)$$

这时, (70.10) 化为

$$b_1(t)-8\kappa_1^2 b_1(t)=-\frac{\varepsilon}{2\kappa_1\dot{a}(t,i\kappa_1)}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\{\dot{\phi}(i\kappa_1)-b_1(t)\dot{\psi}(\kappa_1)\}\phi(k_1)q[u]\,dx.\quad(72.28)$$

由上列各式, 得

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(i\kappa_1)-b_1(t)\dot{\psi}(i\kappa_1)&=-i2x\phi(x,i\kappa_1)+\frac{1}{i2\kappa_1}e^{\kappa_1 x}-b_1(t)\frac{1}{i2\kappa_1}e^{-\kappa_1 x}\\&=\left(-ix\,\mathrm{sech}\,Z-i\frac{1}{\kappa_1}\mathrm{sh}\,Z\right)e^{\kappa_1\xi}.\quad(72.29)\end{aligned}$$

这里用到了 (72.20). 或者

$$\dot{\phi}(i\kappa_1)-b_1(t)\dot{\psi}(i\kappa_1)=-i\frac{1}{\kappa_1}\left(x\kappa_1+\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2Z\right)\mathrm{sech}\,Ze^{\kappa_1\xi}.\,(72.30)$$

注意 $\dot{a}(i\kappa_1)=(i2\kappa_1)^{-1}$, (72.21) 的右端为

$$-\frac{\varepsilon}{2\kappa_1^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sech}^2 Z\left(\kappa_1 x+\frac{1}{2}\mathrm{sh}2Z\right)e^{2\kappa_1\xi}dZ.\quad(72.31)$$

由 (72.20) 得

$$b_{1t}(t)=\left(2\kappa_{1t}\xi+2\kappa_1\xi_t\right)e^{2\kappa_1\xi}.\quad(72.32)$$

于是得到了 (72.28) 左端. 注意 (72.23), 比较此两端, 消去相同因子后, 得

$$\xi_t = 4\kappa_1^2 - \frac{\varepsilon}{4\kappa_1^3}\int_{-\infty}^{\infty} q[u]\,\mathrm{sech}^2 Z\left(Z + \frac{1}{2}\mathrm{sh}2Z\right)dZ. \tag{72.33}$$

现在来看 KdV 方程的阻尼效应. 含阻尼项的 KdV 方程是

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = -\Gamma u, \tag{72.34}$$

这里 Γ 为一正常数. 所以,

$$\varepsilon q[u] = -\Gamma u. \tag{72.35}$$

对于 1- 孤子解, 有

$$\varepsilon q[u] = 2\Gamma\kappa_1^2\mathrm{sech}^2 Z. \tag{72.36}$$

代入 (72.23), 注意

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sech}^4 Z\, dZ = \frac{4}{3}, \tag{72.37}$$

得到

$$\kappa_{1t} = -\frac{2\kappa_1\Gamma}{3}, \tag{72.38}$$

因而

$$\kappa_1(t) = \kappa_{10}e^{-2\Gamma t/3}, \tag{72.39}$$

式中 κ_{10} 是一常数, 它是 $t=0$ 时的 κ_1 的值. 因为 κ_1 正比于孤子振幅和宽度的倒数, 而上式说明 $\kappa_1(t)$ 随 t 增大而减小, 所以孤子由于阻尼而展宽, 最后衰减到 0.

代入 (72.33), 可见右端积分中的被积函数是 Z 的奇函数, 因而积分为 0. 于是得

$$\xi_t = 4\kappa_1^2. \tag{72.40}$$

将 (72.39) 代入，积分，得

$$\xi(t)=\frac{3}{\Gamma}\left[\kappa_{10}^2-\kappa^2(t)\right]+\xi_0. \tag{72.41}$$

当 $\Gamma\to 0$ 时，此式成为

$$\xi=4\kappa_{10}^2 t+\xi_0, \tag{72.42}$$

一切还原为不含修正项时的结果.

§ 73　KdV方程的连续谱的修正

现在来看连续谱的修正. 由 (8.1), 有

$$\overline{\psi(x,\bar{k})}=\{1+R(x,k)+J(x,k)\}\,e^{-ikx}, \tag{73.1}$$

这里

$$R(x,k)=i\frac{1}{k-k_1}\,c_1\,\psi(x,k_1)\,e^{ik_1x}, \tag{73.2}$$

$$J(x,k)=\frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(k')\psi(x,k')e^{ik'x}}{k'-k}\,dk'. \tag{73.3}$$

解为

$$u(x)=-2\frac{d}{dx}\{R(x)+J(x)\}, \tag{73.4}$$

式中 $R(x)$ 和 $J(x)$ 见 (5.15). 设含修正项的 KdV 方程的解是

$$u(x,t)=u^a(x,t)+\delta u, \tag{73.5}$$

并引入

$$\psi(\lambda)=\psi^a(\lambda)+\delta\psi(\lambda), \tag{73.6}$$

其中 $\psi^a(x,k)$ 满足

$$\overline{\psi^a(x,\bar{k})}=\left\{1+i\frac{1}{k-k_1}c_1\psi^a(x,k_1)e^{ik_1x}\right\}e^{-ikx}. \tag{73.7}$$

u^a 与 $\psi^a(x,k)$ 的关系是

$$u^a(x) = -2\frac{d}{dx}\{c_1\psi^a(x,k_1)e^{ik_1x}\}. \tag{73.8}$$

这里的 κ_1 和 ξ 由含修正项的公式决定. 于是,

$$\delta\tilde{\psi}(x,k)e^{ikx} = i\frac{1}{k-k_1}c_1\delta\psi(x,k_1)e^{ik_1x} + J^a(x,k), \tag{73.9}$$

式中 $J^a(x,k)$ 是 ε 级的量, 即将 (73.3) 中的 $J(x,k)$ 所含的 $\psi(x,k')$ 换成 $\psi^a(x,k')$. 代入 (73.4), 得

$$\delta u(x) = -2\frac{d}{dx}\{c_1\delta\psi(x,k_1)e^{ik_1x} + J^a(x)\}. \tag{73.10}$$

在 (73.9) 中, 由于原来是无反射的, 现在的 $r(k)$ 是由于修正项而引起的, 所以已是 ε 一级的量. 在 $J^a(x,k)$ 中的 $\psi^a(x,k)$ 直接就是不含修正项的 KdV 方程的相应于无反射时的约斯特解 $\psi(x,k)$, 因而是已知的. $r(k)$ 又从前面由修正项决定散射数据的时间相依的关系定出, 所以也是已知的. (73.9) 中待定的是 $\delta\psi(x,k)$. 可以由解线代数方程而得出.

在 (73.9) 中, 设 $k=-i\kappa_1$, 注意 (4.6)、$\psi(x,i\kappa_1)$ 是实的等关系, 有

$$\delta\psi(x,i\kappa_1)e^{\kappa_1x} = -\frac{1}{2\kappa_1}c_1\delta\psi(x,i\kappa_1)e^{-\kappa_1x} + J^a(x,-i\kappa_1). \tag{73.11}$$

于是

$$\delta\psi(x,i\kappa_1) = \left\{1+\frac{c_1}{2\kappa_1}e^{-2\kappa_1x}\right\}^{-1}J^a(x,-i\kappa_1)e^{-\kappa_1x}. \tag{73.12}$$

由 (5.19), 得

$$J^a(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k')\psi(x,k')e^{ik'x}\,dk'. \tag{73.13}$$

$$J^a(x,-i\kappa_1)=\frac{1}{i2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(k')\psi(x,k')e^{ik'x}}{k'+i\kappa_1}\,dk'. \tag{73.14}$$

于是，

$$c_1\delta\psi(x,k_1)e^{ik_1x}+J^a(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k')\psi^2(x,k')e^{ik'x}\,dk'. \tag{73.15}$$

代入 (73.10), 得

$$\delta u(x)=-\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k')\psi^2(x,k')\,dk'\right\}. \tag{73.16}$$

以 (72.13) 代入，得

$$\delta u(x)=-2\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k')\left(\frac{k+i\kappa_1\operatorname{th}Z}{k+i\kappa_1}\right)^2e^{i2kx}\right\}. \tag{73.18}$$

以 Z 代替 x, 上式 $\delta u(Z,t)$ 成为

$$-\frac{d}{dZ}\left\{\frac{1}{2\pi\kappa_1}\int_{-\infty}^{\infty}r(k')\left(\frac{k+i\kappa_1\operatorname{th}Z}{k+i\kappa_1}\right)^2e^{i2k(Z/\kappa_1+\xi)}\right\}. \tag{73.19}$$

下面我们似乎可以像 §67 中对含修正项的 NLS 方程那样继续讨论. 但是，由于在 KdV 方程的反散射方法的建立中我们着眼于求解，对某些反散射方法中的问题没能仔细推敲，而在这里微扰处理中，这些问题起着不可忽略的重要作用.

在一维薛定谔方程的散射问题中，已得到一个一般的结论，(2.29), 即

$$\lim_{k\to0}\frac{b(k)}{a(k)}=-1. \tag{73.20}$$

将 (72.14) 代入 (69.27), 得

$$r_t(t,k)-i8k^3r(t,k)=i\frac{\varepsilon}{2k(k-i\kappa_1)^2}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} q(x,t)(k - i\kappa_1 \operatorname{th} Z)^2 e^{-i2kx}\, dx. \tag{73.21}$$

即

$$r_t(t,k) - i8k^3 r(t,k) = i\frac{\varepsilon}{2k(k-i\kappa_1)^2\kappa_1}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} q(x,t)(k - i\kappa_1 \operatorname{th} Z)^2 e^{-i2k(Z/\kappa_1+\xi)}\, dZ. \tag{73.22}$$

当 $\varepsilon q = -\Gamma u$ 时，(73.22) 可以在 $t << 1$ 条件下得出显式解 $r(t,k)$. 发现结果并不满足 (73.20). 因此关于含修正项的 KdV 方程的微扰理论在连续谱部分存在一些有待解决的困难. 卡尔普曼 (V.I.Karpman) 和马斯洛夫 (E.M.Maslov) 对此作过专门的讨论 (见文献 [10]).

附录 A 关于紧致台集的假设

为什么诺伊曼展开式 (3.3) 一般不能解析地延拓到 k 的下半平面呢？因为当 k 成为复数，且 $\mathrm{Im}\,k < 0$ 时，我们一般得不到不等式 (3.4).

但若 $u(x)$ 具有紧致的台集，则约斯特解 $\phi(x,k)$、$\psi(x,k)$ 可以解析地延拓到到复 k 的下半平面的适当区域. 所谓 $u(x)$ 的台集，就是使 $u(x) \neq 0$ 的点 x 的集合. 紧致性是点集拓扑中的概念，但是，如果所论的点集是度量空间，则子集是紧致的等价于它是闭的和有界的. 因为 $u(x)$ 是在实数轴 x 上定义的，实数是度量空间，上述条件也就是 $u(x) \neq 0$ 点集是闭的和有界的.

设在有界闭区间 $[-L, L]$ 之外， $u(x) = 0$. 于是，当 k 为复的，且 $\mathrm{Im}\,k < 0$, 这时，代替 (3.4) 为

$$\left|\int_{-\infty}^{x} \frac{e^{i2k(x-y)} - 1}{i2k} u(y)\right| dy \leq \frac{e^{2(\mathrm{Im}\,k)2L} + 1}{2|k|} \int_{-\infty}^{x} |u(y)|\, dy. \quad (A.1)$$

有了这一不等式，就可以对约斯特解 $\phi(x,k)$ 和 $\psi(x,k)$ 向复 k 的下半平面解析延拓有了出发条件. 当然，手续是相当复杂的. 而且肯定不能延拓到整个下半平面. 譬如由 (8.14) 可见，在无反射且 $N = 1$ 时所得的 $\psi(x,k)$ 就可以解析延拓到复 k 的下半平面除 $k = \bar{k}_1$ 之外的区域. $k = \bar{k}_1$ 是 $\psi(x,k)$ 的极点. 所以，一般采取松动的说法，可以解析地延拓到复 k 的下半平面的适当区域. 同理， $\tilde{\phi}(x,k)$ 和 $\tilde{\psi}(x,k)$ 可以解析地延拓到复 k 的上半平面的适当区域. 于是 $a(k)$ 和 $\bar{a}(k)$ 可以分别解析延拓到复 k 的下和上半平面的适当区域. $b(k)$ 和 $\tilde{b}(k)$ 可以解析延拓到复 k 的上和下半平面的适当区域. 于是有

$$b_n = b(k_n), \quad \tilde{b}_n = \tilde{b}(\bar{k}_n). \quad (A.2)$$

同时， (2.9) 和 (2.23),

$$\phi(x,k)=a(k)\tilde{\psi}(x,k)+b(k)\psi(x,k) \tag{A.3}$$

和

$$\tilde{\phi}(x,k)=\tilde{b}(k)\tilde{\psi}(x,k)+\tilde{a}(k)\psi(x,k) \tag{A.4}$$

也不再限于实数 k 成立. 它们在上和下半平面的适当区域也成立. 这些就是关于 $u(x)$ 具有紧致台集假设和一些今后要用到的结果.

科学家中外译名对照表

Ablowitz,M.J.	阿布罗维茨	Binet,	比奈
Cauchy,A.L.	柯西	de Vries,G.	德弗里斯
Faddeev,L.D.	法捷也夫	Gardner,C.S.	噶德奈尔
Gel'fand,I.M.	盖尔芳德	Gordon,W.	戈登
Greene,J.M.	格林	Hamilton,W.R.	哈密顿
Karpman,V.I.	卡尔普曼	Kaup,D.J.	考普
Korteweg,D.J.	科特韦格	Kruskal,M.D.	克鲁斯卡
Landau,L.D.	朗道	Lax,P.D.	拉克斯
Levitan,B.	列维坦	Lifshitz,E.M.	栗弗席茨
Marchenko,V.A.	马尔钦柯	Maslov,E.M.	马斯洛夫
Miura,R.M.	谬拉	Newell,A.C.	纽维尔
Schrödinger,E.	薛定谔	Schwartz,L.	施瓦兹
Segur,H.	色谷	Shabat,A.B.	沙巴特
Takhtajan,L.A.	塔赫塔詹	von Neumann,J.	诺埃曼
Volterra, V.	沃泰拉	Zakharov,V.E.	萨哈诺夫

参考文献

[1] S.V.Manakov, S.P.Novikov, L.P.Pitaevsky, V.E.Zakharov, *Theory of solitons*(Nauka, Moscow, 1980).

[2] G.L.Lamb,Jr., *Elements of soliton theory*(John Wiley & Sons, New York, 1980).

[3] L.A.Takhtajan, L.D.Faddeev, *Hamiltonian Approach in the theory of solitons*(Nauka, Moscow, 1986).

[4] C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal, R.M.Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys.Rev.Lett.*, 19(1967)1095-1097.

[5] P.Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Commun.Pure Appl.Math.*, 21(1968)467-490.

[6] V.E.Zakharov, A.B.Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Sov. Phys.JETP* 34(1972)62-69.

[7] V.E.Zakharov, A.B.Shabat, Interaction between solitons in a stable medium, *Sov.Phys.JETP* 37(1973)823-828.

[8] M.J.Ablowitz, D.J.Kaup, A.C.Newell, H.Segur, Method for solving the sine-Gordon equation, *Phys.Rev.Lett.*, 30(1973) 1262-1264.

[9] D.J.Kaup, A perturbation theory for the inverse scattering transform, *SIAM Journal of Appl.Math.*, 31(1976)121.

[10] V.I.Karpman, E.M.Maslov, Perturbation theory for solitons, *Sov. Phys.JETP* 46(1978)281-291.

编 后 记

“非线性科学丛书”的主编郝柏林教授在蒲富恪教授的建议下，邀请我写一本《孤子理论和微扰方法》的书．我年青时是在胡宁教授指导下学高能物理理论的．后来，由于条件的变化难以做下去．近年来转到非线性科学领域，则是蒲富恪教授建议的．非线性科学的三个基本分支：混沌、分形和孤子，其飞速发展并真正成形都是在本世纪60年代到70年代．由于周知的原因国内起步较晚，未能赶上非线性科学飞速发展的大好时光．那现在能做些什么呢？就我多少熟悉的孤子理论来说，一是它的主要应用方面，如光纤孤子传输，等离子体和一维磁性的非线性问题等．另一是方法的进一步发展如处理 $1+2$ 或 $1+3$ 维的非线性问题和解决 $1+1$ 维长期未能解决的难题等．这也就是谷超豪教授反复强调的，应用数学就是要得到有重要应用的结果，要做出方法上的发展，解决过去未能解决的和新的实际问题．

这本书怎样写呢？我想，就是要让读者读了之后，确实有所收获．目前，国际和国内都有一些有关的书．从各方面都可看到一些介绍和评述．本书作者也没有足够的能力和相当的认识来这样做，因此只好不说甚么．

写一本书，由于作者知识的局限，和本着“不知者不道”的原则，不可能把这一领域的各个方面，写得都很详尽和中肯．但是，应当客观地分析各个方面的主次和权重，再定书的内容对各个部分的取舍和所占的篇幅．

写一本书，切不可带有偏见．排斥一些人的重要工作，而大量引述另一些人的并不重要的工作．不可以把自己的工作放在

一个不适当的地位，当然更不可以把他人的工作说成是自己的贡献．“不窃”是起码的原则．书是白纸黑字，写过了头，将来总是无法交代的．

写一本书，要真正有益于读者，并不是一件容易的事．如果，简单地照抄别的书，排列组合一下，那读者不如直接读原来被抄的书．有的书，那架势十分吓人，书中不少自我诩美之词，可是经不起内行人看．写一本书，不要追求“不识者之誉”，而要避免“识者之讥”，此乃千古明训．

世界上，轻而易举的工作决不会是有价值的工作．我们有时会发现前人的工作中的某些错误，但是要把错误改正过来做出正确的结果，并不是一件简单的事．即使正确的结果得到后，也很有必要弄清原来错误产生的根源，因为错误不是无缘无故产生的．我们千万不可以自比为诸葛亮，而把别人都当成阿斗．没有严格的学术训练和深入的工作磨练，在如非线性科学这样深刻的学科中，是不可能做出有价值的工作的．

人贵有自知之明，自我感觉不可太好．工作要经得起长时间的考验．自比为什么“斯坦”，什么“斯基”，什么“斯泰”，只能成为笑柄．

近年来，报刊上，电台和电视台上闹出了不少笑话．在评定各种基金和各种奖励时，在评定教授职称和评定博士导师资格中，也出现了名为内行实为外行的无端吹捧． KdV 方程的反散射方法的求解，是首次将非线性方程的求解，与线性方程的求解的反问题联系了起来．怎么能把如此周知的成果归到不相干的人的名下呢？ NLS 方程的提出和在非线性光学等方面的应用，至少已有三十年的历史，此方程怎么可能是现今还很年青的人提出的呢？利用 SG 方程的微扰理论处理超导的约瑟夫逊结问题的成功和困难都是明摆着的，不可能轻而易举做出什么里程碑似的贡献．作为超短脉冲在光纤中传输的基本方程的 NLS 方程的研究是现今被认为很有应用前景的光纤孤子通信的理论基础．怎

么能听信并不研究实际问题的人说此基本方程是错误的而应采用他提出的什么方程呢？电介质和磁介质在超短脉冲激光作用下有完全不同的性质．怎样可以把超短脉冲激光在光纤中的传输的理论和实验类比地搬到磁介质中来呢？

学术工作的评价是学术领域的事，是长期的事，其价值归根结蒂是由实践来检验的．有的人总是自诩为伯乐，可相马无术，结果自然成为某些不学无术、追名逐利之徒攀附的对象，情实可悲．

一本书，要费很大力气写出来才有必要写，否则就不必写．既然如此，写这本书，当然要与已有的书多少有所不同，否则又何必写呢．但是，不是为了不同而不同．而是要根据学科的发展，把一些有价值的和有利于读者的内容在可能范围内包括进来．本书在这方面做了一些努力．结果如何，自然应由识者来评价．本书编者深深感到学而后知不足，尽管作了努力，错误在所难免．凡是指出本书的错误的读者，本书编者将向他赠本书 1 册．

本书写作过程中得到谷超豪教授、蒲富恪教授的多方指教，得到颜家壬教授、文志雄教授的无私协助，这里表示衷心的感谢．本书的初稿或其中的部分曾先后在南京大学声学所、南开大学数学所、上海交通大学物理系、武汉大学中法数学中心、中山大学高等学术中心和复旦大学数学所等处讲授过．得到魏荣爵教授、葛墨林教授、蔡建华教授、文志英教授、李华钟教授、周义昌教授、周作领教授和周子翔博士的帮助，并从听众中得到不少改进本书的建议，这里表示诚挚的感谢．本书编者的研究工作得到国家自然科学基金，国家基础研究《非线性科学》基金和理论物理专项基金的资助，本书的出版得到上海市新闻出版局学术著作出版基金的资助，这里表示深切的感谢．

黄 念 宁

1996 年 9 月 18 日